Cvičení plus
Termika F1032

20. listopadu 2024

Michael Krbek

Příklad 1. Bimetalový pásek. Bimetalový pásek o tloušťce $2h$ je rovný pro teplotu T. Jaký je poloměr křivosti R pásku pokud jej zahřejeme na teplotu $T + \Delta T$? Součinitele teplotní délkové roztažnosti jsou $\alpha_1 > \alpha_2$. Předpokládejte, že tloušťka vrstvy každého z kovůje h a že $h \ll R$.

Příklad 2. Stirling. Odvoďte tzv. Stirlingovu aproximaci

$$(n-1)\ln(n-1) - n + 2 \le \ln n! \le n \ln n - n + 1.$$

Využijte vyjádření integrálu z funkce $\ln x$ pomocí dolních a horních Riemannových součtů.

Příklad 3. Kmitající kulička. Ve velké nádobě o objemu V_0 se nachází ideální plyn, jehož tlak je atmosferický. Ve vršku nádoby je upevněna skleněná válcová trubice o vnitřním průřezu S, do níž těsně zapadá kovová kulička o hmotnosti m. Zanedbáme-li třecí síly mezi trubicí a kuličkou, bude kulička po mírném vychýlení z rovnovážné polohy vykonávat harmonické kmity. Najděte vztah mezi úhlovou frekvencí kmitů ω a ostatními proměnnými v úloze, předpokládáme-li, že posloupnost stavů ideálního plynu v nádobě tvoří vratný adiabatický děj a poměr měrných tepelných kapacit při konstantním tlaku resp. objemu je κ.

Příklad 4. Hookeův zákon. Uvažte řetěz, jehož články mohou být pouze v jednom ze dvou stavů: vodorovném, kdy článek řetězu má délku a a svislém, kdy článek řetězu má zanedbatelnou délku. na jedné straně řetězu působíme silou o velikosti F. Počet článků řetězu je n, délka řetězu je $m = nx$.

(a) Určete entropii řetězu v závislosti na jeho délce.

(b) Určete energii řetězu v závislosti na jeho délce.

(c) Ze vztahu, který spojuje entropii s energií určete závislost působící síly na délce řetězu.

(d) V limitě vysokých teplot odvoďte Hookeův zákon.

Příklad 5. de Moivreova – Laplaceova věta o aproximaci binomického rozdělení pomocí normálního rozdělení. Binomické nebo Bernoulliho rozdělení pro n nezávislých pokusů s pravděpodobností úspěchu jednotlivého pokusu p a neúspěchu jednotlivého pokusu $q = 1 - p$ a počtem úspěšných pokusů k je dáno diskrétní pravděpodobnostní funkcí

$$p(n,k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

(a) Dokažte, že

$$\sum_{k=0}^{n} p(n,k) = 1.$$

(b) Odvoďte výraz pro střední hodnotu

$$\mu = \langle k \rangle = \sum_{k=0}^{n} k\, p(n,k)$$

a rozptyl

$$\sigma^2 = \langle (\mu - k)^2 \rangle = \sum_{k=0}^{n} (\mu - k)^2 p(n,k).$$

Normální či Gaussovo rozdělení se střední hodnotou 0 a rozptylem 1 je dáno spojitou pravděpodobnostní funkcí

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}.$$

(c) Dokažte, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}u\, f(u) = 1.$$

(d) Dokažte, že f vyhovuje diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}\ln f}{\mathrm{d}u} = \frac{1}{f}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} = -u.$$

(e) Uvažme normální rozdělení se střední hodnotou rovnou μ a rozptylem rovným σ^2, tj. $u = (k - \mu)/\sigma$. Ukažte, že takové rozdělení dobře aproximuje $p(n,k)$. V diferenciální rovnici z (d) nahraďte derivaci

$$\frac{1}{f}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}$$

konečným rozdílem

$$\frac{1}{p(n,k)} \frac{p(n,k+1) - p(n,k)}{k+1-k}.$$

Příklad 6. Einsteinův model pevné látky. viz Schroeder: Introduction to Thermal Physics str. 52–65.

Příklad 7. Simulace plynu z tuhých disků v obdélníkové nádobě. viz Colab notebook zde

`https://colab.research.google.com/drive/1qRoKiu_TB5MrUHeXGnJN7MrVpF3W3kju?authuser=1#forceEdit=true&sandboxMode=true`

a práce na jeho úpravách.