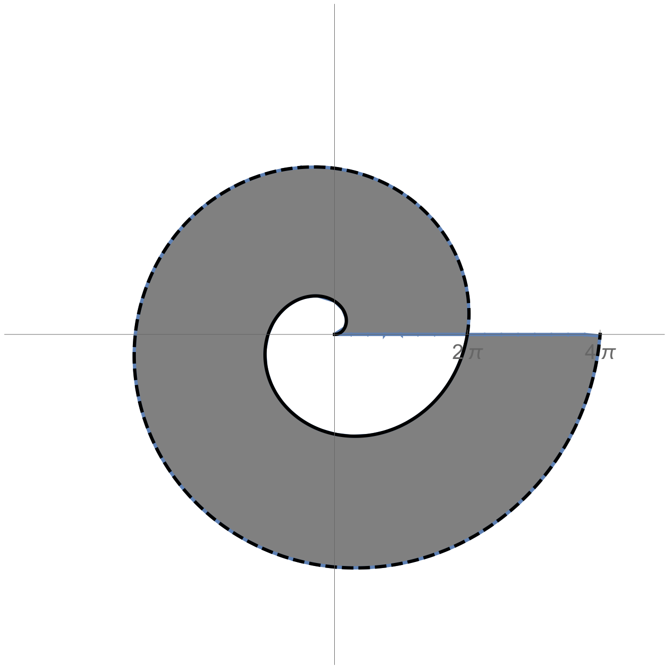
Vzorové příklady pro 1. písemku z F3063 Integrování forem

(1) Přímo pomocí dolních a horních součtů vypočtěte integrál $\int_a^b x^3 \mathrm{d}x$. Využijete asi, že $\sum_{i=0}^n i^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$. Pro jistotu ale předchozí rovnost dokažte matematickou indukcí.

(2) Vypočtěte plochu omezenou dvěma závity Archimedovy spirály $r = \varphi$ v polárních souřadnicích v rovině.



(3) V bazích (e_1, e_2, e_3) ve V a (f_1, f_2, f_3, f_4) v W je dáno lineární zobrazení $\alpha\colon V \to W$ předpisem

$$\alpha(e_1) = f_1 - f_4$$
$$\alpha(e_2) = f_1 + f_2$$
$$\alpha(e_3) = f_2 + f_3$$

Vypočtěte α^*, $\Lambda^2\alpha^*$ a $\Lambda^3\alpha^*$ a zapište jejich matice pomocí indukovaných bazí. Pořadí prvků indukovaných bazí zvolte.

(4) Určete kontrakci algebraické formy $\alpha = e^1\wedge e^2\wedge e^3 - e^2\wedge e^3\wedge e^4 - e^3\wedge e^4\wedge e^1$, $\alpha \in \Lambda^3 V^*$ vektorem $v = e_1 - 2e_2 + 3e_3 - 4e_4$, $v \in V$.

(5) V euklidovském prostoru jsou pomocí kartézských souřadnic dány roviny $x + y = 0$, $y + z = 0$, $z + x = 0$, $x + y + z = 1$. Určete objem oblasti, kterou ohraničují.

(6) Dokažte, že pokud je systém lineárních forem $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ lineárně nezávislý, platí $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \neq 0$.

(7) Určete ortonormální bázi a duální ortonormální bázi pro válcové souřadnice v euklidovském prostoru $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$.

(8) Vyjádřete gradient funkce $f(r, \varphi, z)$ a divergenci obecného vektorového pole vyjádřeného v ortonormální bázi ze (7).