Cvičení z Lineární algebry 1

Michael Krbek

podzim 2003

1 23.9.2003

1.1 Hodina

1. Jsou dána komplexní čísla $z = 1+2\,\mathrm{i}$ a $w = 2-\mathrm{i}$. Vyjádřete c algebraickém tvaru

$$(z+w)^3, \quad ,(zw)^*, \quad \frac{z}{w}.$$

2. Řešte v komplexním oboru rovnice

$$z^4 + 3 = 0, \qquad z^5 + 1 = 0.$$

3. Využijte komplexní čísla k důkazu, že spojnice vrcholů trojúhelníka se středy protilehlých stran se protínají v jediném bodě.

4. Nechť $|z| = 1$. Zapište v goniometrickém tvaru

$$1 - z \qquad \text{a} \qquad 1 + z.$$

Potom ukažte, že výraz

$$\sqrt{\frac{1-z}{1+z}}$$

určuje pro proměnný argument θ dvojici přímek v Gaussově rovině.

5. Ukažte, že Möbiova transformace

$$w = \frac{az+b}{b^*z+a^*},$$

kde $a, b \in \mathbb{C}$ a $|a|^2 = |b|^2$, zobrazí kružnici $|z| = 1$ samu na sebe.

6. Řešte v $\mathbb{Z}_p$ rovnice

$$2x + 1 = 2, \qquad 4x + 3 = 0,$$

kde $p = 3, 5, 7$.

7. V $\mathbb{Z}_8$ najděte všechna řešení rovnice

$$4x + 6 = 2.$$

8. V $\mathbb{Z}_7$ najděte všechna řešení rovnice

$$x^3 = 1.$$

9. V $\mathbb{Z}_5$ najděte všechna řešení rovnice

$$x^3 + 2x = 2.$$

2 30.9.2003

Dělali jsme příklady z oddílu 2.2 sbírky úloh, na `ftp://www.math.muni.cz/pub/math/people/Cadek/lectures/linearni_algebra/sbirka.ps`.

3 7.10.2003

3.1 Test

1. V zbytkové třídě $\mathbb{Z}_9$ řešte rovnici

$$4x + 7 = 8.$$

2. Jedná se v případě zbytkové třídy $\mathbb{Z}_9$ o těleso? Pokud ne, který z axiomů tělesa nesplňuje?

3. Uvažujte množinu množinu uspořádaných trojic $(x, y, x+y)$, $x, y \in \mathbb{R}$. Dále je dána operace součtu vektorů a násobení vektoru skalárem, a to

$$+\colon (x, y, x+y) + (x', y', x'+y') = (x+x', y+y', 0)$$
$$\cdot\colon \alpha(x, y, x+y) = (\alpha x, \alpha y, 0).$$

Určete zda se jedná o vektorový prostor. Pokud ne, určete axiomy vektorového prostoru, které nejsou splněny.

3.2 Hodina

Příklady z oddílu 3 sbírky úloh, na `ftp://www.math.muni.cz/pub/math/people/Cadek/lectures/linearni_algebra/sbirka.ps`.

1. Najděte analogické vzorce k binomickým vzorcům

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

pro matice (pozor na nekomutativnost násobení).

2. Hamiltonovy kvaterniony $\mathbb{H}$ jsou příkladem *nekomutativního* tělesa. Jedná se o čísla typu $a + b\,\mathrm{i}_1 + c\,\mathrm{i}_2 + d\,\mathrm{i}_3$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, pro jejichž násobení platí $\mathrm{i}_k^2 = -1$, $k = 1, 2, 3$, $\mathrm{i}_1\,\mathrm{i}_2 = \mathrm{i}_3$ a dále cyklicky.

(a) Ukažte, že tato čísla splňují axiomy tělesa až na komutativitu násobení.

(b) Kvaterniony můžeme reprezentovat pomocí komplexních čtvercových matic řádu 2

$$H = \begin{pmatrix} a + \mathrm{i}\,b & c + \mathrm{i}\,d \\ -c + \mathrm{i}\,d & a - \mathrm{i}\,b \end{pmatrix}.$$

Dokažte to.

4 14.10.2003

1. Příklady ze skript z kapitoly 4: Soustavy lineárních rovnic

2. Řešte v závislosti na parametru soustavu rovnic s rozšířenou maticí soustavy

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right).$$

Obrázek 1: Šestistěn

3. Kirchhoffovy zákony. Uvažujme nějakou elektrickou síť obsahující zdroje stejnosměrného proudu a spotrebiče (odpory). Formálně ji lze popsat jako graf o N uzlech, ve kterém každé hraně je přiřazena velikost a směr protékajícího proudu. Tyto proudy vyhovují Kirchhoffovým zákonům

$$\begin{array}{ll} \text{proudy:} & \sum_{a,(ab)} I_{ab} = 0 \\ \text{napětí:} & \sum_{(ab)\in C} U_{ab} - I_{ab} R_{ab} = 0, \end{array}$$

kde C je libovolný cyklus v H. Vrcholy značíme a, b, spojnice mezi nimi (ab). U_{ab} značí elektromotorické napětí zdroje vloženého mezi uzly b a a, obdobně pro proud I_{ab} od uzlu b k uzlu a a R_{ab} odpor mezi uzly a a b. V první rovnici sčítáme přes všechny hrany (ab) procházející libovolným uzlem a. Druhá rovnice platí pro všechny (orientované) smyčky C, sčítá se přes všechny hrany (ab) náležející smyčce.

Dokažme jednoznačnost řešení pro dané odpory $R_{ab} > 0$ a elektromotorická napětí U_{ab}. (viz cvičení k učebnici Motl, Zahradník)

4. Mějme drátěný pravidelný šestistěn, každá z 9 hran má odpor R. Spočtěte (viz obr.)

(a) napětí mezi protilehlými vrcholy, pokud jsou na nich přívody a protékající proud je I.

(b) napětí mezi sousedními vrcholy, pokud jsou na nich přívody a protékající proud je I.

5 21.10.2003

5.1 Test

1. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 3a - 2b &= -1 \\ 4a + 5b &= 3 \\ 7a + 3b &= 2 \end{aligned}$$

   pro neznámé a, b.

2. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} ax + y - 2z &= 1 \\ x - y + z &= 0 \\ (1+a)y - z &= b, \end{aligned}$$

   s reálnými parametry a, b.

5.2 Hodina

1. Příklady z kapitoly 5 skript.

2. Určete matici inverzní k blokové matici řádu n

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

   kde A je čtvercová matice řádu k, D čtvercová matic řádu $n-k$, C a D jsou obdélníkové matice patřičných řádů.

6 4.11.2003

6.1 Písemka

1. Může vektorový prostor obsahovat dva nulové prvky? Pokud ano, uveďte příklad, pokud ne dokažte!

2. Řešte soustavu rovnic v $\mathbb{R}$ s reálným parametrem a danou v maticovém tvaru

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{array}\right)$$

3. Určete inverzní matici k matici

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Je dán elektrický obvod ve tvaru krychle. Odpor každé strany dolní podstavy je R, odpor každé strany horní podstavy je $3R$, odpor ostatních stran je $2R$. Na dva sousední vrcholy spodní podstavy je připojen zdroj tak, že protéká proud I. Určete proudy protékající stranami krychle.

6.2 Hodina

Příklady z oddílu 6.1 a 6.2 sbírky.

7 11.11.2003

7.1 Hodina

Příklady z oddílu 6.2 a 7 sbírky.

7.2 Test

Jsou dány podprostory

$$\begin{aligned} L_1 &= \langle (1,1,0,0), (0,1,1,0), (0,0,1,1) \rangle \\ L_2 &= \langle (1,0,1,0), (0,2,1,1), (1,2,1,2) \rangle \end{aligned}$$

1. Určete dimenzi a bázi L_1 a L_2.

2. Určete dimenzi a bázi součtu $L_1 + L_2$

8 18.11.2003

Příklady z kapitoly 8 skript.

9 25.11.2003

9.1 Test

1. Zapište lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ v kanonických bázích $\mathbb{R}^3$ pomocí matice $f(x) = Ax$. Zobrazení je dáno jako otočení o úhel $-\pi/4$ kolem osy y. Najděte obraz vektoru o souřadnicích $(1, 1, 1)$ v kanonické bázi tímto zobrazením.

2. Určete jádro a obor hodnot lineárního zobrazení $f\colon \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ daného předpisem
$$f(X) = AX - XA, \quad \text{kde}$$
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

9.2 Hodina

Konec kapitoly 8, kapitola 9.

Důkaz věty: Nechť $f\colon V \to W$ je lineární zobrazení. Pak platí $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V$.

Označme $h = \dim \operatorname{Im} f$ a zvolme v oboru hodnot libovolnou bázi $\{f_1, \dots, f_h\}$. Ukážeme, že jejich libovolně vybrané vzory, označené $\{e_1, \dots, e_h\}$ jsou po zobrazení lineárně nezávislé; tedy protože $\{e_1, \dots, e_h\}$ jsou LN, platí
$$a^1 e_1 + \cdots + a^h e_h = 0_V.$$
a taky
$$\begin{aligned} f(a^1 e_1 + \cdots + a^h e_h) &= f(0_V) \\ a^1 f(e_1) + \cdots + a^h f(e_h) &= 0_W \\ a^1 f_1 + \cdots + a^h f_h &= 0_W. \end{aligned}$$

Argument lze také otočit. Protože jsou $\{f_1, \dots, f_h\}$ LN, jsou i $\{e_1, \dots, e_h\}$ LN a označíme L_f podprostor jimi generovaný.

Ukážeme, že $V = L_f \oplus \operatorname{Ker} f$.

(a) Dokážeme, že $L_f \cap \operatorname{Ker} f = 0_V$. Uvažujeme libovolný vektor $p \in L_f \cap \operatorname{Ker} f$. Musí platit $p \in L_f$ a tedy $p = p^1 e_1 + \cdots + p^h e_h$, z toho plyne $f(p) = p^1 f_1 + \cdots + p^h f_h$. Zároveň $p \in \operatorname{Ker} f$ a tedy $f(p) = 0_W$. Tedy $p^= \cdots = p^h = 0$ a $p = 0_V$, což jsme chtěli ukázat.

(b) Vezmeme $s \in V$ libovolný. $f(s) \in \operatorname{Im} f$, takže
$$\begin{aligned} f(s) &= s^1 f_1 + \cdots s^h f_h \\ &= s^1 f(e_1) + \cdots + s^h f(e_h) \\ &= f(s^1 e_1 + \cdots + s^h e_h) \end{aligned}$$
a vektor s je tedy tvaru $s = k + s^1 e_1 + \cdots s^h e_h$, kde $k \in \operatorname{Ker} f$. Takže $L_f \oplus \operatorname{Ker} f = V$ a odtud již máme dokazované tvrzení.

10 2.12.2003

10.1 Hodina

1. Je dáno zobrazení $f\colon V^3 \to W^2$, které je v bazích e_1, e_2, e_3 prostoru V^3 a f_1, f_2 prostoru W^2 dáno jako
$$\begin{aligned} f(e_1) &= 2f_2 - f_1, \\ f(e_2) &= f_1, \\ f(e_3) &= 3f_1 + f_2. \end{aligned}$$
Zapište toto zobrazení v maticovém tvaru.
Uvažujme jinou bázi $\bar{e}_1 = e_1 - e_2, \bar{e}_2 = e_2 - e_3, \bar{e}_3 = e_3 + e_1$ v prostoru V^3. Vyjádřete zobrazení f v bazích $\bar{e}_i$ a f_j.
Uvažujme jinou bázi $\bar{f}_1 = f_1 + 2f_2, \bar{f}_2 = 2f_1 - f_2$ v prostoru W^2 Vyjádřete zobrazení f v bazích e_i, $\bar{f}_j$.
Vyjádřete zobrazení f v bazích $\bar{e}_i$, $\bar{f}_j$.

2. Příklady ze skript z kapitoly 9.

11 9.12.2003

11.1 Písemka

1. Určete parametry a, b, c tak, aby měla soustava rovnic
$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ cx + ay &= b \\ bx + cy &= a \end{aligned}$$

právě jedno řešení.

2. Uvažujte vektorový prostor matic dimenze dvě $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ nad tělesem reálných čísel a jeho podmnožinu $A = (a_{ij})$ matic takových, že $a_{11} + a_{22} = 0$ (bezestopé matice).

   (a) Ukažte, že se jedná a vektorový podprostor.

   (b) Napište nějakou jeho bázi.

   (c) Doplňte tuto bázi na bázi prostoru $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ a napište v této bázi souřadnice jednotkové matice.

3. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ jsou dány podprostory $V_1 = [(1,-1,1,-1),(0,1,0,1)]$ a $V_2 = [(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,1,-1,1)]$ Spočtěte průnik $V_1 \cap V_2$ podprostorů V_1 a V_2.

4. Ve vektorovém prostoru polynomů stupně nejvýše tři $\mathbb{R}_3[x]$ proměnné x jsou dány báze $\alpha = (1, 1+x, 1-x^2, x+x^3)$ a $\beta = (1+x^2, 1-x^2, x+x^3, x-x^3)$. Najděte matici přechodu

   (a) od α k β.

   (b) od β k α.

11.2 Hodina

Příklady z kapitoly 9.

12 16.12.2003

12.1 Hodina – Determinanty

1. Spočtěte determinant matic

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Spočtěte determinant čtvercové matice řádu n
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & n-1 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & n \end{pmatrix}$$

3. Spočtěte determinant čtvercové matice řádu n
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Dokažte, že platí tzv. Cramerovo pravidlo.

5. Dokažte, že determinant antisymetrické matice lichého řádu je roven nule.

6. Určete rekurentní vztah pro determinant tridiagonální matice (tj. matice, která má nenulové prvky pouze na, nad a pod hlavní diagonálou).

7. Uvažujte matici
$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$
kde A resp. D jsou čtvercové matice řádu k a ℓ. Uvažujte matici F řádu k a matici G typu ℓ/k. Čemu jsou rovnají determinanty matic
$$\begin{pmatrix} FA & FB \\ C & D \end{pmatrix} \text{ a } \begin{pmatrix} A & B \\ C+GA & D+GB \end{pmatrix}?$$

8. Dokažte vzorec pro tzv. *Vandermondeův* determinant.
$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & (x_1)^2 & \dots & (x_1)^{n-1} \\ 1 & x_2 & (x_2)^2 & \dots & (x_2)^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_n & (x_n)^2 & \dots & (x_n)^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>j}(x_i - x_j).$$