1. Zadání úlohy. Kruhová membrána poloměru ρ plošné hustoty σ je rovnoměrně napnuta s napětím (síla na jednotku délky) T, přičemž hranice kruhu se nepohybuje. Výchylku membrány uznačme u. Analogickým postupem jako pro strunu lze odvodit pohybovou rovnici (gravitační působení zanedbáváme)

$$\sigma u_{tt} - T(u_{xx} + u_{yy}) = 0. \tag{1}$$

Okrajová podmínka je

$$u(t, x, y)|_{x^2+y^2=\rho^2} = 0 \quad \forall t. \tag{2}$$

Počáteční podmínky zvolíme například

$$u_t(0, x, y) = 0, \quad u(0, x, y) = u_0(x, y). \tag{3}$$

Především se napřed substitucí

$$t \to \sqrt{\frac{\sigma}{T}} t \tag{4}$$

zbavíme obou parametrů σ a T a přejdeme k rovnici

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0. \tag{5}$$

2. Separace proměnných. Problém budeme řešit metodou separace proměnných ve válcových souřadnicích

$$x = r\cos\phi \tag{6}$$
$$y = r\sin\phi \tag{7}$$
$$z = 0. \tag{8}$$

Vyjádříme Laplaceův operátor $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ ve válcových souřadnicích a dostaneme rovnici

$$u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\phi\phi}}{r^2} - u_{tt} = 0. \tag{9}$$

Předpokládejme řešení ve tvaru $u(t, r, \phi) = T(t)R(r)\Phi(\phi)$ a dosaďme. Dostáváme

$$R''T\Phi + \frac{R'T\Phi}{r} + \frac{RT\Phi''}{r^2} - R\Phi T'' = 0, \tag{10}$$

kterou celou násobíme $r^2/(RT\Phi)$. Pak

$$\underbrace{\frac{r^2R'' + rR'}{R} - \frac{r^2T''}{T}}_{\text{závisí pouze na } r \text{ a } t} + \underbrace{\frac{\Phi''}{\Phi}}_{\text{závisí pouze na } \phi} = 0. \tag{11}$$

Z toho plyne, že oba sčítance jsou rovny až na znaménko stejné konstantě, kterou s typickou předvídavostí označíme jako n^2. Řešíme nejprve rovnici pro Φ.

$$\Phi'' + n^2\Phi = 0 \tag{12}$$

s tzv. cyklickou podmínkou $\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi)$. Řešení dostaneme jako

$$\Phi(\phi) = A\cos(n\phi) + B\sin(n\phi), \tag{13}$$

kde n musí být přirozené číslo, aby byla splněna cyklická podmínka. Zbývá řešit rovnici

$$\underbrace{\frac{R'' + \frac{1}{r}R'}{R} - \frac{n^2}{r^2}}_{\text{závisí pouze na } r} - \underbrace{\frac{T''}{T}}_{\text{závisí pouze na } t} = 0. \tag{14}$$

Konstantu, jíž jsou rovny oba sčítance, označme $-\omega^2$.

3. Besselova rovnice.

Řešme nejprve rovnici pro R:

$$r^2R'' + rR' + (\omega^2r^2 - n^2)R = 0. \tag{15}$$

Zbavme se nejprve konstanty ω substitucí $\omega r \to r$ a dostáváme tzv. Besselovu rovnici

$$r^2R'' + rR' + (r^2 - n^2)R = 0. \tag{16}$$

Máme zájem zjistit její řešení omezená na intervalu $[0, \omega\rho]$, která splňují podmínku $R(\omega\rho) = 0$. Frobeniovou metodou (viz přednáška) určíme, že omezenými řešeními jsou Besselovy funkce

$$\mathrm{J}_n(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k r^{2k+n}}{2^{2k+n}k!(n+k)!}. \tag{17}$$

Označme $o_{n\alpha}$ α-tý kladný kořen zleva rovnice $\mathrm{J}_n(r) = 0$. Řešení splňující okrajovou podmínku $R(\omega\rho) = 0$ jsou tedy dána

$$R_n(r) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} A_\alpha \mathrm{J}_n\left(\frac{r o_{n\alpha}}{\rho}\right) \tag{18}$$

a pro přípustné frekvence dostáváme

$$\omega = \frac{o_{n\alpha}}{\rho}. \tag{19}$$

4. Obecné řešení. Časovou závislost řešení již nyní najdeme jednoduše. Z počáteční podmínky $u_t(0, x, y) = 0$ dostáváme, že

$$T(t) = A \cos \omega t. \tag{20}$$

Obecné řešení tedy nakonec dostáváme ve tvaru

$$u(t, r, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \mathrm{J}_n \left(\frac{o_{n\alpha} r}{\rho} \right) \cos \left(\frac{o_{n\alpha} t}{\rho} \right) \left(A_{n\alpha} \cos n\phi + B_{n\alpha} \sin n\phi \right). \tag{21}$$

5. Úplné řešení. K zjištění úplného řešení je třeba využít ortogonality Besselových funkcí. Lze ukázat, že

$$\int_0^1 \mathrm{J}_n(o_{n\alpha} r) \mathrm{J}_n(o_{n\beta} r) r \mathrm{d}r = \tfrac{1}{2} \mathrm{J}_{n+1}^2(o_{n\alpha}) \delta_{\alpha\beta}. \tag{22}$$

Pomocí této relace ortogonality již jednoduše určíme koeficienty $A_{n\alpha}$ a $B_{n\alpha}$ v obecném řešení jako

$$A_{n\alpha} = \frac{2}{\pi \rho^2 \mathrm{J}_{n+1}^2(o_{n\alpha})} \int_0^\rho \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \; r \mathrm{J}_n \left(\frac{o_{n\alpha} r}{\rho} \right) \cos(n\phi) u_0(r, \phi),$$
$$B_{n\alpha} = \frac{2}{\pi \rho^2 \mathrm{J}_{n+1}^2(o_{n\alpha})} \int_0^\rho \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \; r \mathrm{J}_n \left(\frac{o_{n\alpha} r}{\rho} \right) \sin(n\phi) u_0(r, \phi).$$

Dodatek 1: Ortogonalita Besselových funkcí. Předpokládejme, že a a b jsou dva nulové body Besselovy funkce $\mathrm{J}_n(r)$, tj. $\mathrm{J}_n(a) = \mathrm{J}_n(b) = 0$. Potom $\mathrm{J}_n(ar)$ resp. $\mathrm{J}_n(br)$ splňují diferenciální rovnice

$$r(r\mathrm{J}_n'(ar))' + (a^2 r^2 - n^2) \mathrm{J}_n(ar) = 0 \tag{23}$$
$$r(r\mathrm{J}_n'(br))' + (b^2 r^2 - n^2) \mathrm{J}_n(br) = 0. \tag{24}$$

První rovnici vynásobíme $\mathrm{J}_n(br)/r$ druhou $\mathrm{J}_n(ar)/r$ a odečteme. Dostáváme

$$[r\mathrm{J}_n'(ar)\mathrm{J}_n(br) - r\mathrm{J}_n(ar)\mathrm{J}_n'(br)]' = (b^2 - a^2) r \mathrm{J}_n(ar) \mathrm{J}_n(br) \tag{25}$$

a odtud po integraci

$$(b^2 - a^2) \int_0^1 r\mathrm{J}_n(ar)\mathrm{J}_n(br)\mathrm{d}r = \left[r\mathrm{J}_n'(ar)\mathrm{J}_n(br) - r\mathrm{J}_n(ar)\mathrm{J}_n'(br)\right]_0^1 = 0. \quad (26)$$

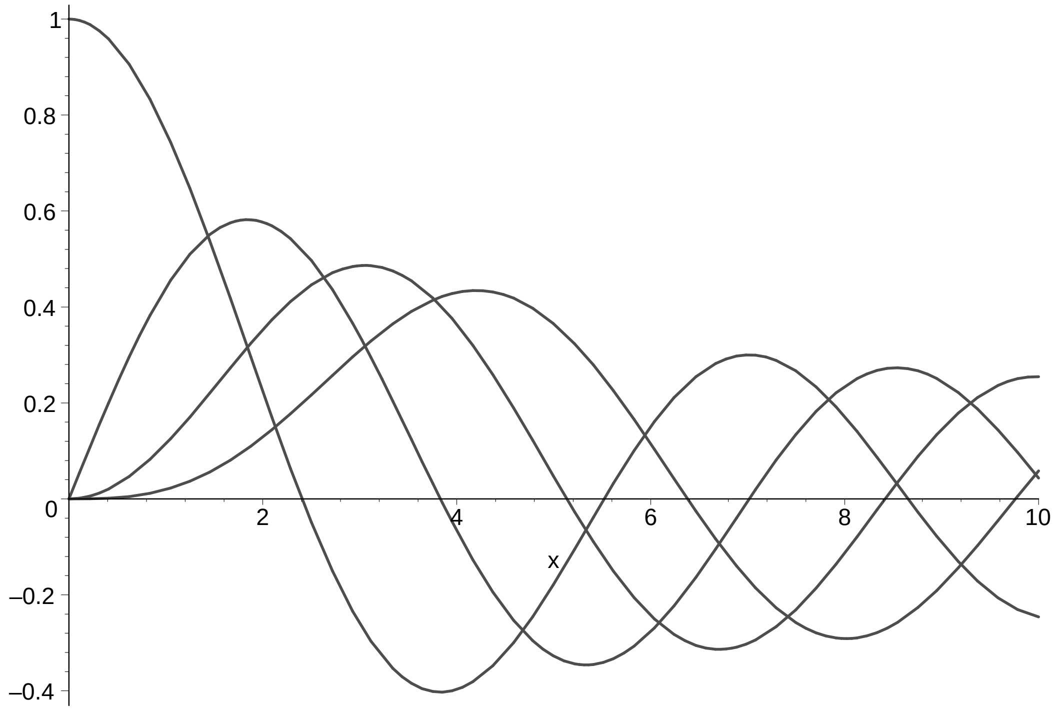
Integrál

$$\int_0^1 r\mathrm{J}_n^2(ar)\mathrm{d}r \quad (27)$$

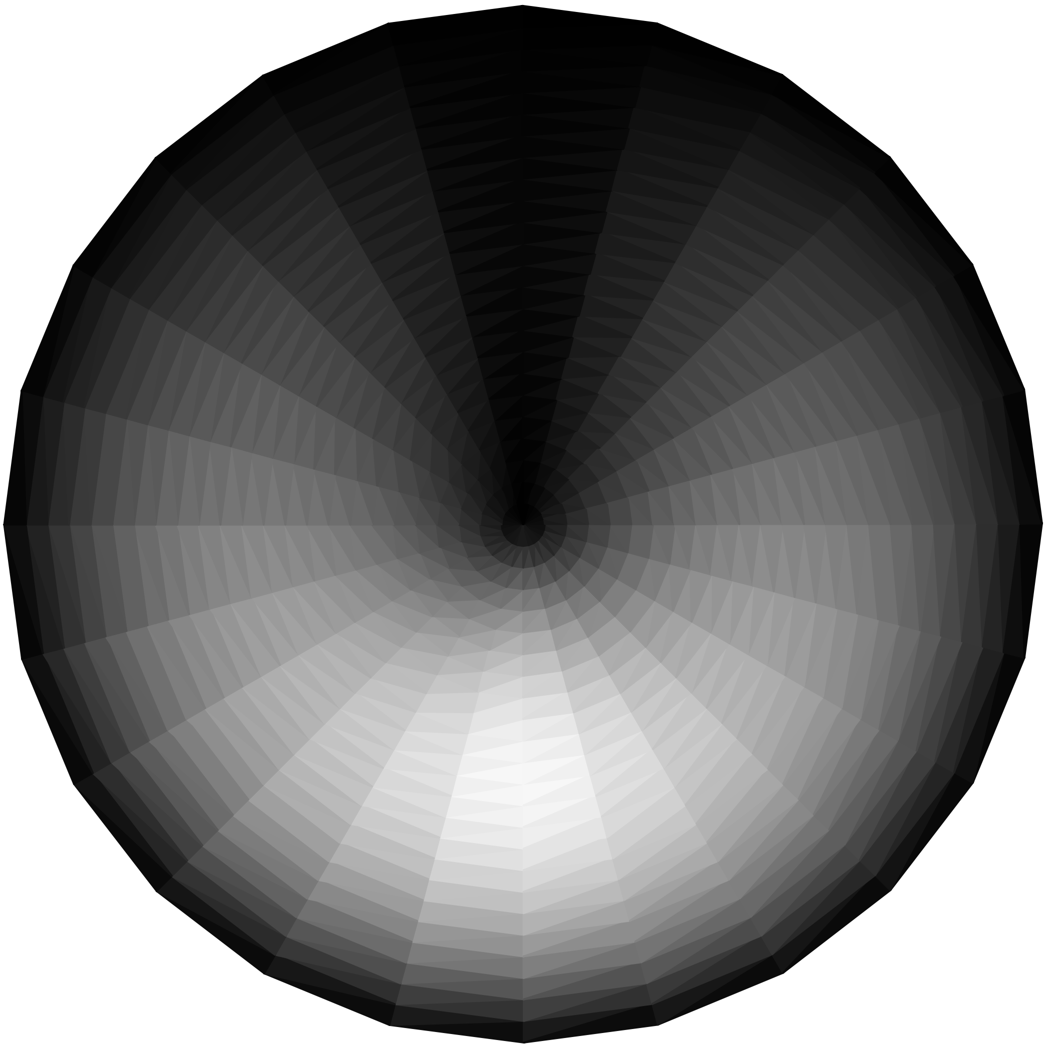
lze určit rozvojem Besselovy funkce $\mathrm{J}_n(a(r+\epsilon))$ do Taylorovy řady v bodě ar a potom je třeba využít rekurentních vztahů pro Besselovy funkce

$$\mathrm{J}_{n-1}(r) + \mathrm{J}_{n+1}(r) = \frac{2n}{r}\mathrm{J}_n(r), \quad (28)$$

$$\mathrm{J}_{n-1}(r) - \mathrm{J}_{n+1}(r) = 2\mathrm{J}_n'(r). \quad (29)$$



Obrázek 1: Besselovy funkce J_0, J_1, J_2, J_3



Obrázek 2: Počáteční podmínka $u_0(r,\phi) = 4r(1-r)\left(r + 1 - \frac{|\phi-\pi|}{\pi}\right)$. Časový vývoj je v animaci na hlavní stránce.