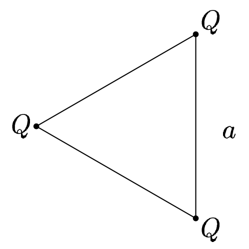
ELEKTROSTATIKA A MAGNETOSTATIKA

22. dubna 2003

1. Coulombův zákon

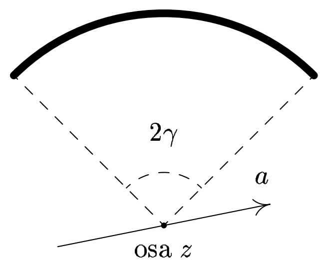
Příklad 1. Tři volné, stejně velké, bodové náboje $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q > 0$ jsou umístěny ve vakuu ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka o stranách délky a. Je možné umístit čtvrtý náboj Q_4 tak, aby soustava byla v rovnováze? Jestliže ano, udejte polohu a velikost takového náboje a rozhodněte, zda rovnovážná poloha bude stabilní.



Obrázek k 1: Vrcholy rovnostranného trojúhelníka

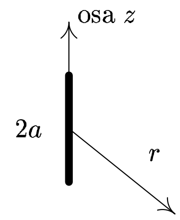
V následujících příkladech určete potenciál Φ a intenzitu elektrostatického pole $\mathbf{E}$ v daných bodech prostoru (všech pokud není zadáno jinak) vytvářeného:

Příklad 2. Obloukem kružnice o poloměru a a středovém úhlu 2γ, který je rovnoměrně nabit nábojem Q, v ose procházející středem křivosti oblouku, kolmé k rovině obloukem určené (ve vakuu). Správnost výsledku ověřte limitním přechodem $\gamma \to 0$.



Obrázek k 2: Oblouk kružnice

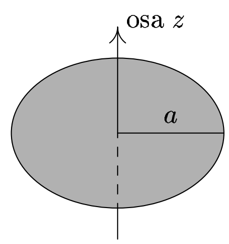
Příklad 3. Úsečkou délky $l = 2a$, umístěnou ve vakuu, rovnoměrně nabitou s lineární hustotou náboje τ.



Obrázek k 3: Úsečka

Pomůcka: Zvolte si soustavu válcových souřadnic $(O; r, \alpha, z)$ tak, že počátek O splývá se středem této úsečky a osa z s její podélnou osou.

Příklad 4. Na ose kruhového rovinného disku s poloměrem a, nabitého rovnoměrně s plošnou hustotou η ve vakuu.

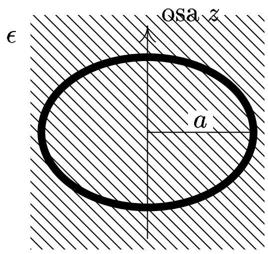


Obrázek k 4: Rovinný disk

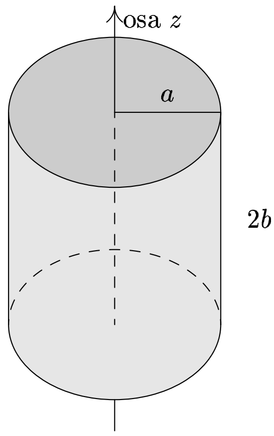
Příklad 5. V ose tenkého kruhového prstence s poloměrem a, rovnoměrně nabitého nábojem Q , je-li umístěn v dielektrickém prostředí s permitivitou ϵ. Ve kterých bodech na ose nabývá velikost intenzity maxima a minima? Určete tyto hodnoty.

Příklad 6. V ose válcové plochy s poloměrem a a s výškou $2b$, je-li rovnoměrně nabita s plošnou hustotou σ. V okolí plochy je vakuum.

Příklad 7. V ose kulové půlslupky o poloměru a, která je umístěna v dielektrickém prostředí s permitivitou ϵ.



Obrázek k 5: Kruhový prstenec

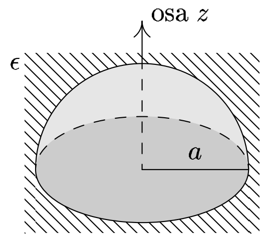


Obrázek k 6: Válcová plocha

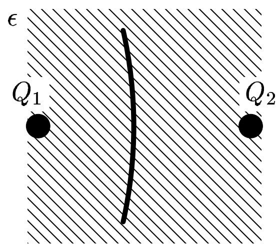
Příklad 8. Odvoďte vztah pro potenciál $\Phi^{(1)}$ elektrostatického pole elektrického dipólu ve vakuu. Užitím výsledku dále zjistěte vztah pro intenzitu $\mathbf{E}^{(1)}$ elektrostatického pole dipólu ve vakuu.

Příklad 9. Určete, ve kterém místě ve vzdálenosti r od dipólu je intenzita elektrostatického pole buzeného tímto dipólem maximální, respektive minimální. Vypočítejte poměr velikostí intenzity v těchto bodech.

Příklad 10. Dva bodové náboje Q_1, Q_2 opačné polarity (uvažujme $Q_1 > 0$, $Q_2 < 0$) jsou umístěny v dielektriku s permitivitou ϵ v konečné vzdálenosti $2a$ od sebe. Volíme-li $\phi(\infty) = 0$, ukažte, že pro zadanou soustavu nábojů existuje též nulová ekvipotenciální plocha, jejíž body mají konečnou vzdálenost od nábojů Q_1, Q_2. Vyšetřete tvar těchto ekvipotenciálních ploch v závislosti na velikostech nábojů Q_1 a Q_2.



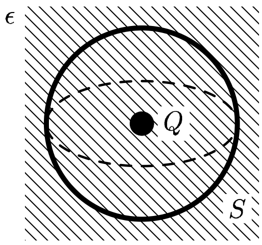
Obrázek k 7: Kulová půlslupka



Obrázek k 10: Dva bodové náboje

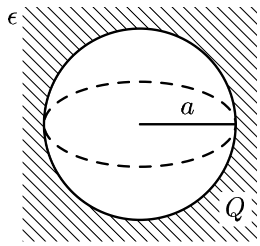
2. Gaussova věta

Příklad 1. Užitím Gaussovy věty odvoďte vztah pro intenzitu a potenciál elektrostatického pole bodového náboje Q v dielektriku s permitivitou ϵ. Dále ukažte, že je možné Coulombův zákon (v elektrostatice) odvodit jako důsledek platnosti Maxwellových rovnic.



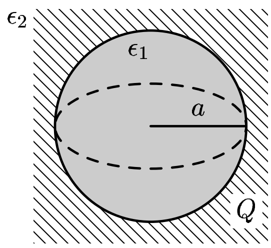
Obrázek k 1: K odvození Gaussovy věty

Příklad 2. S užitím Gaussovy věty určete pole buzené kulovou slupkou o poloměru a, která je nabita nábojem Q a obklopena dielektrikem s permitivitou ϵ.



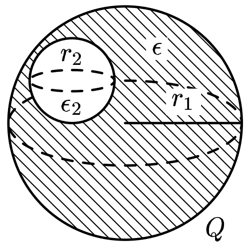
Obrázek k 2: Slupka obklopená dielektrikem

Příklad 3. V homogenní dielektrické kouli o permitivitě ϵ_1 a poloměru a je prostorově rovnoměrně rozložen náboj Q. Vně koule je dielektrikum o permitivitě ϵ_2. Určete elektrostatické pole buzené nábojem Q.



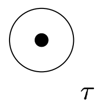
Obrázek k 3: Dielektrická koule v dielektriku

Příklad 4. Náboj Q je rovnoměrně rozložen s objemovou hustotou ρ v dielektrickém tělese tvaru koule o poloměru r_1 , ve které je kulová dutina o poloměru r_2 . Určete intenzitu elektrostatického pole buzeného nábojem Q uvnitř dutiny, je-li tato vyplněna vzduchem ($\epsilon_2 \doteq \epsilon_0$). Dielektrické těleso má permitivitu ϵ.



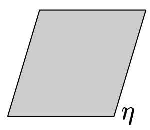
Obrázek k 4: Dutina v dielektrické kouli

Příklad 5. S užitím Gaussovy věty určete potenciál a intenzitu elektrostatického pole, jež ve vakuu budí přímka, na které je rovnoměrně rozložen náboj s lineární hustotou τ.



Obrázek k 5: Přímka ve vakuu (pohled "shora")

Příklad 6. Určete s užitím Gaussovy věty potenciál a intenzitu elektrostatického pole buzeného ve vakuu rovnoměrně nabitou rovinou s plošnou hustotou náboje η.



Obrázek k 6: Rovina ve vakuu

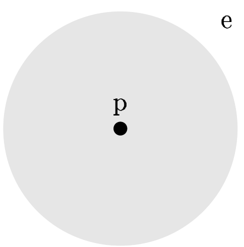
Příklad 7. Z kvantové mechaniky víme, že elektron v základním stavu vodíkového atomu zdánlivě vytváří oblak s rozdělením náboje v závislosti na vzdálenosti od počátku r.

$$\rho = \frac{e}{\pi a^3} \exp(-2r/a),$$

kde e je elementární náboj a a je Bohrův poloměr,

$$a = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2},$$

m je redukovaná hmotnost protonu. Určete elektrické pole atomu za předpokladu, že náboj protonu je soustředěn v počátku souřadnic.

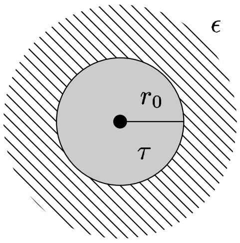


Obrázek k 7: Základní stav atomu vodíku

Příklad 8. Náboj je rovnoměrně rozložen na přímce s délkovou hustotou náboje τ . Permitivita prostředí ϵ je funkcí vzdálenosti r od této přímky, tj. $\epsilon = \epsilon(r)$. Nechť

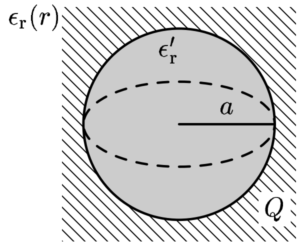
$$\lim_{r\to r_0^+} \epsilon(r) \neq \lim_{r\to r_0^-} \epsilon(r)$$

tj. na válcové ploše $r = r_0$ se permitivita mění skokem. Určete hustoty prostorově a plošně rozloženého vázaného náboje.



Obrázek k 8: Přímka v dielektriku

Příklad 9. V homogenní dielektrické kouli o relativní permitivitě ϵ_r' a poloměru a je prostorově rozložen náboj Q . Vně koule je dielektrikum o relativní permitivitě ϵ_r , která závisí na vzdálenosti r od středu koule, tj. $\epsilon_\mathrm{r} = \epsilon_\mathrm{r}(r)$. Určete hustotu $\rho^{(\mathrm{p})}$ prostorově rozloženého náboje a hustotu $\eta^{(\mathrm{p})}$ vázaného náboje rozloženého na sféře $r = a$.



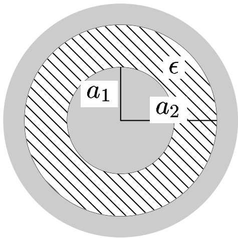
Obrázek k 9: Dielektrická koule v dielektriku

Příklad 10. Ukažte, že mezi plošnou hustotou η volného náboje rozloženého na povrchu vodiče a plošnou hustotou vázaného náboje $\eta^{(\mathrm{p})}$ na rozhraní vodiče a dielektrika o relativní permitivitě ϵ_r platí vztah

$$\eta^{(\mathrm{p})} = \frac{1-\epsilon_\mathrm{r}}{\epsilon_\mathrm{r}}\eta.$$

3. Kapacita a elektrostatická energie

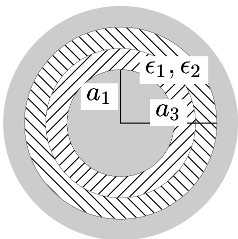
Příklad 1. Vypočítejte kapacitu sférického kondenzátoru, jehož elektrody tvoří dvě koncentrické kulové slupky o poloměrech a_1, a_2 ($a_1 < a_2$), mezi kterými je dielektrikum s permitivitou ϵ.



Obrázek k 1. Kondenzátor tvořený soustřednými kulovými slupkami

Příklad 2. Vypočítejte kapacitu koaxiálního kabelu (tj. kapacitu vnitřního válcového vodiče proti souosému válcovému plášti). Poloměr vnitřního vodiče (žíly) je a_1, vnitřní poloměr pláště je a_2 a izolace má permitivitu ϵ. Délka kabelu je $l \ll a_2$. (Předpokládejte, že náboj je podélně rovnoměrně rozložen.)

Příklad 3. Koaxiální kabel má poloměr vnitřního vodiče a_1, vnitřní poloměr pláště a_3 a délku l ($l \gg a_3$). Izolace mezi vodiči je tvořena dvěma vrstvami dielektrika s permitivitou ϵ_1 (vnitřní) a ϵ_2 (vnější) a s rozhraním tvořícím souosou válcovou plochu o poloměru a_2 . Určete kapacitu C kabelu.



Obrázek k 3: Koaxiální kabel s dvěma dielektriky

Příklad 4. Určete interakční energii W_{int} soustavy nábojů Q_1, Q_2, Q_3 a Q_4 z příkladu 1 sekce 1.

Příklad 5. Vypočítejte energii W_{el} elektrostatického pole buzeného vodivou koulí o poloměru a , nabitou nábojem Q v dielektriku s permitivitou ϵ. Dále ukažte, že tato energie je rovna práci, kterou bychom museli vykonat při (postupném) nabíjení koule až na hodnotu náboje Q.

Příklad 6. Odvoďte vztah pro tzv. klasický poloměr elektronu. (Návod: Elektron považujte za kulový o poloměru a s nábojem $-e$ rovnoměrně rozloženým na povrchu a jeho klidovou energii $m_{\mathrm{e}}c^2$ ztotožněte s elektrostatickou energií vlastního pole.)

Příklad 7. Vypočtěte interakční energii dvou tuhých dipólů.

Příklad 8. Určete sílu, jež působí na kladnou elektrodu deskového kondenzátoru, je-li napětí mezi elektrodami U. Účinná plocha elektrod je S a jejich vzdálenost d. Mezi elektrodami uvažujte vzduch ($\epsilon \doteq \epsilon_0$). Pole v kondenzátoru považujte za homogenní.

Příklad 9. Určete sílu, působící na desku dielektrika s permitivitou $\epsilon =$ konst, která je částečně zasunuta mezi elektrody deskového kondenzátoru obdélníkového tvaru s rozměry a , b. Šířka mezery mezi deskami kondenzátoru je d . Ve zbývajícím prostoru mezi elektrodami je vzduch. Napětí mezi elektrodami je U. (Pole v kondenzátoru považujte v obou dielektrických prostředích za konstantní.)

Příklad 10. Bodový náboj Q je umístěn v dielektriku s permitivitou ϵ ve vzdálenosti h od vodivé roviny s potenciálem $\phi = 0$. Určete potenciál elektrostatického pole v dielektriku a dále rozložení náboje indukovaného na vodiči a jeho celkovou hodnotu Q_{i}.

4. Magnetostatika

Příklad 1. Určete intenzitu **H** magnetického pole buzeného lineární kruhovou proudovou smyčkou o poloměru a protékanou proudem I v bodech na ose smyčky kolmé k rovině smyčky.

Příklad 2. Stanovte intenzitu magnetického pole **H** v libovolném bodě P na ose solenoidu délky l a poloměru a, který má jednu tenkou vrstvu N závitů protékaných stacionárním proudem I.

Příklad 3. Určete intenzitu magnetického pole, které budí úsek uzavřené lineární smyčky stacionárního proudu I, jenž má tvar kruhového oblouku o poloměru a se středovým úhlem γ , v libovolném bodě na ose kružnice obsahující tento oblouk.

Příklad 4. Určete vektorový potenciál **A** magnetického pole, které budí ve vakuu nekonečný přímý lineární vodič protékaný proudem I .

Příklad 5. Určete vektorový potenciál a intenzitu magnetického pole vedení tvořeného dvěma rovnobežnými přímými vodiči ve vzdálenosti $2a$ od sebe, jimiž procházejí proudy I opačného směru. Permeabilita okolního prostředí je μ_0 .

Příklad 6. Koule o poloměru a je rovnoměrně povrchově nabita nábojem Q a rotuje konstantní úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega}$ kolem jednoho svého průměru. Vypočítejte indukci **B** magnetického pole buzeného touto koulí v libovolném bodě prostoru. Permeabilita koule je $\mu =$ konst., vně koule je vakuum.

Příklad 7. Dokažte, že ze vztahu

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi R^2}\mathbf{m} \times \mathbf{R}_0$$

plyne vztah

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\frac{3(\mathbf{m}\cdot\mathbf{R}_0)\mathbf{R}_0 - \mathbf{m}}{R^3} ,$$

kde **m** je magnetický moment.

Příklad 8. Tenký kruhový prstenec o poloměru R je rovnoměrně nabit nábojem Q a rotuje s úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega}$ kolem osy procházející jeho středem kolmo k rovině, ve které leží. Vypočítejte magnetický moment tohoto rotujícího prstence.

Příklad 9. Disk o poloměru a (a zanedbatelné tloušťce) je rovnoměrně nabit celkovým nábojem Q a otáčí se rovnoměrně s úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega}$ kolem osy procházející jeho středem kolmo na rovinu disku. Určete jeho magnetický moment.

Příklad 10. Vyšetřete vzájemné silové působení dvou uzavřených tuhých smyček stacionárních proudů. Ukažte, že pro vzájemné silové působení dvou proudových elementů těchto smyček neplatí zákon akce a reakce a že tento zákon platí pro celkové vzájemné působení smyček.

5. Elektrický odpor a indukčnost

Příklad 1. Dvě ideálně vodivé paralelní shodné obdélníkové desky o rozměrech a, b jsou od sebe vzdáleny ℓ a mezi nimi se nachází materiál o ohmické vodivosti σ. Určete elektrický odpor takové soustavy.

Příklad 2. Dva ideálně vodivé souosé válce délky ℓ, vnitřní o poloměru a, vnější o'poloměru b, $a, b \ll \ell$, uzavírají látku o ohmické vodivosti σ. Určete elektrický odpor této soustavy.

Příklad 3. Dvě ideálně vodivé soustředné sféry o poloměrech $a < b$ jsou odděleny látku s ohmickou vodivostí σ. Určete elektrický odpor této soustavy.

Příklad 4. Zjistěte samoindukčnost solenoidu o N závitech, které jsou navinuty na jádro ve tvaru válce o poloměru a, délce ℓ a permeabilitě μ.

Příklad 5. Zjistěte samoindukčnost toroidu o N závitech s jádrem ve tvaru anuloidu s vnitřním poloměrem a, vnějším b a permeabilitě μ.

Příklad 6. Dvě cívky těsně navinuté na jádro s vysokou permeabilitou, takže všechen magnetický tok vytvořený průchodem proudu jednou cívkou, prochází druhou cívkou (nekonečně velká permeabilita jádra), tvoří ideální transformátor. Popište tuto soustavu.

Příklad 7. (Spočtěte vnější) indukčnost na jednotku délky koaxiálního kabelu, tj. dvou ideálně vodivých nekonečných sousosých válců o poloměrech $a < b$.

Příklad 8. Obdélníková smyčka o rozměrech a, b a hmotnosti m je rychlostí v vhozena kolmo do homogenního magnetického pole o indukci B. Zanedbejte gravitační sílu a určete magnetický indukční tok smyčkou. Dále předpokládejte, že drát, který tvoří smyčku, má průřez o ploše A a ohmickou vodivost σ. Určete pohybovou rovnici smyčky.

Příklad 9. Kruhová smyčka o poloměru a, ohmické vodivosti σ a ploše průřezu drátu A je málo vzdálena ℓ od nekonečného přímého vodiče, kterým protéká proměnný proud. Najděte vzájemnou indukčnost M a odpor R smyčky, dále předpokládejte, že smyčka je stacionární a má samoindukčnost L. Jaká je časová závislost indukovaného proudu za předpokladu, že v čase $t = 0$ náhle zapnete proud o velikosti I? A co když naopak dlouhou dobu protéká drátem proud velikosti I a náhle je vypnut?

Příklad 10. Uvažujte malou obdélníkovou smyčku o rozměrech a, b, průřezu drátu A a vodivosti σ která klouže po hraně poloroviny protékané proudem. Jedna strana smyčky je rovnoběžná s hranou, vzdálenost těchto rovnoběžek je ℓ. Určete indukovaný proud pokud náhle zapnete konstantní plošný proud ve směru hrany o velikosti K. A co když se velikost proudu mění (v daném směru) harmonicky?