ROVNICE ELEKTROMAGNETICKÉHO POLE

29. dubna 2003

1. Speciální teorie relativity, Maxwellovy rovnice v čtyřrozměrném tvaru

Příklad 1. Odvoďte rovnice pro Lorentzovu transformaci. při předpokladu konstantnosti rychlosti světla c. Využijte skutečnosti, že vzdálenost mezi událostmi U a V vyjádřená ve vztažných soustavách, které se vůči sobě pohybují konstantní rychlostí o velikosti V, se zachovává. Vysvětlete také kontrakci délek a dilataci času.

Příklad 2. Najděte rovnice, které dávají do souvislosti rychlost pohybující se částice v souřadných systémech, které se vůči sobě pohybují konstantní rychlostí o velikosti V.

Příklad 3. Úplně antisymetrický tenzor ve třech a čtyřech dimenzích je definován jako

$$\epsilon^{abc} = \epsilon_{abc} = \begin{cases} 1 & abc \text{ sudá permutace } xyz \\ -1 & abc \text{ lichá permutace } xyz \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

ve třech dimenzích a podobně ve čtyřech dimenzích

$$\epsilon^{abcd} = -\epsilon_{abcd} = \begin{cases} 1 & abcd \text{ sudá permutace } txyz \\ -1 & abcd \text{ lichá permutace } txyz \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Spočtěte ve třech dimenzích $\epsilon^{abc}\epsilon_{def}$, $\epsilon^{abc}\epsilon_{dec}$, $\epsilon^{abc}\epsilon_{dbc}$, $\epsilon^{abc}\epsilon_{abc}$ a ve čtyřech dimenzích $\epsilon^{abcd}\epsilon_{efgh}$, $\epsilon^{abcd}\epsilon_{efgd}$, $\epsilon^{abcd}\epsilon_{efcd}$, $\epsilon^{abcd}\epsilon_{ebcd}$, $\epsilon^{abcd}\epsilon_{abcd}$. Místo souřadnic $txyz$ budeme z dimenzionálních důvodů používat také souřadnic $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (\mathrm{c}t, x, y, z)$.

Příklad 4. Jak se chovají Maxwellovy rovnice při Lorentzově transformaci (viz příklad 1). Pokud požadujeme, aby měly Maxwellovy rovnice stejný tvar ve všech takových vztažných soustavách, jak se musí změnit indukce a intenzity elektrických a magnetických polí?

Příklad 5. Akce pro částici s nábojem q v elektromagnetickém poli, které má čtyřpotenciál $A_a = (\phi, -\mathbf{A})$, je dána křivkovýn integrálem

$$S = S_{\text{hmota}} + S_{\text{interakce}} = -\int_U^V (mc\,\mathrm{d}\,s + qA_a\,\mathrm{d}\,x^a).$$

Určete Lagrangeovu hustotu, zobecněné hybnosti a Hamiltonovu funkci.

Příklad 6. Určete pohyb částice s nábojem q v homogenním elektrickém a magnetickém poli o elektrické intenzitě $\mathbf{E}$ a magnetické indukci $\mathbf{B}$.

Příklad 7. Určete tenzor elektromagnetického pole F^{ab} pomocí principu nejmenší akce, tj. určete pohybové rovnice s využitím čtyřvektorů.

$$\delta S = \delta \int_U^V (-mc\,\mathrm{d}\,s - qA_a\,\mathrm{d}\,x^a) = 0,$$

přičemž

$$\delta A_a = \frac{\partial A_a}{\partial x^b}\delta x^b, \quad \mathrm{d}\,A_a = \frac{\partial A_a}{\partial x^b}\,\mathrm{d}\,x^b.$$

Příklad 8. Určete invarianty elektromagnetického pole, tj. $F_{ab}F^{ab}$ a $\epsilon^{abcd}F_{ab}F_{cd}$ pomocí trojrozměrného značení.

Příklad 9. Určete rovnici kontinuity pro čtyřvektor elektrického proudu $j^a = \rho v^a$, kde ρ je hustota náboje v daném bodě prostoročasu a $v^a = \mathrm{d}\,x^a/\,\mathrm{d}\,t$ je čtyřrychlost. tedy $j = (\mathrm{c}\rho, \mathbf{J})$.

Příklad 10. Akce elektromagnetického pole je dána jako

$$S_{\text{pole}} = -\tfrac{1}{4}\int_\Omega (F_{ab}F^{ab}\,\mathrm{d}\,\Omega = \tfrac{1}{2}\int\!\!\int_V (\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2)\,\mathrm{d}\,V\,\mathrm{d}\,t,$$

kde

$$F_{ab} = \frac{\partial A_b}{\partial x^a} - \frac{\partial A_a}{\partial x^b}$$

jako v příkladu 6. Z principu nejmenší akce $S = S_{\text{interakce}} + S_{\text{pole}}$ odvoďte rovnice elektromagnetického pole. Variací čtyřpotenciálu dostanete druhou sadu pohybových rovnic (první sada plyne z existence čtyřpotenciálu a rovnice kontinuity).

2. Lienard-Wiechertovy potenciály, geometrická optika

Příklad 1. Spočtěte elektromagnetické pole vyvolané nábojem o velikosti q, který se pohybuje rovnoměrně přímočaře rychlostí $\mathbf{V}$.

Příklad 2. Odvoďte rovnice pro Lienard-Wiechertovy potenciály. Pomůcka: Vyjděte z Maxwellových rovnic v čtyřrozměrném tvaru

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{j^i}{c},$$

kde

$$F^{ik} = \frac{\partial A^k}{\partial x_i} - \frac{\partial A^i}{\partial x_k}.$$

Čtyřpotenciál A^i ovšem není určen jednoznačně, takže zvolíme tzv. Lorentzovu kalibraci, tj. předpokládáme, že

$$\frac{\partial A^i}{\partial x_i} = 0.$$

Příklad 3. Spočtěte čtyřpotenciál vyvolaný nábojem q, který se pohybuje po dané trajektorii $\mathbf{r}_0(t)$.

Příklad 4. Fourierovou transformací rozložte pole rovnoměrně přímočaře se pohybujícího náboje do rovinných vln.

Příklad 5. Odvoďte Lagrangeovu funkci pro soustavu pohybujících se nábojů v druhé aproximaci (zanedbáváme tedy členy $\mathbf{v}_i^3/c^3$ a vyšší, kde v_i je rychlost i-té částice systému.

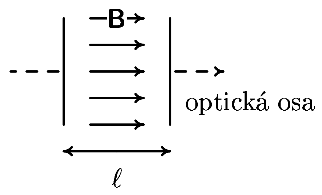
Příklad 6. Odvoďte potenciál, elektrickou intenzitu a magnetickou indukci v dipólové aproximaci (časové změny v rozložení nábojů v systému jsou podstatně větší než doba, za kterou se systémem rozšíří světelný signál).

Příklad 7. Určete potenciál, elektrickou intenzitu a magnetickou intenzitu pole vyvolaného rychle se pohybujícím nábojem pozorované ve velké vzdálenosti od tohoto náboje.

Příklad 8. Odvoďte rovnice pro eikonál. Předpokládáme, že v dostatečně malém místě prostoru můžeme elektromagnetickou vlnu považovat za rovinnou, takže se amplituda i směr vlny mění v prostoru jen velice pomalu (jakoukoliv složku s intenzity elektrického nebo indukce magnetického pole lze zapsat jako $s = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\psi}$.

Příklad 9. V analogii s mechanikou částic určete Hamilton-Jacobiho rovnice pro geometrickou optiku (historicky to bylo naopak).

Příklad 10. Určete ohniskovou vzdálenost magnetické čočky pro nabité částice. Tato je tvořena konstatním magnetickým polem působícím v oblasti o rozměru ℓ (např. solenoid o délce ℓ se zanedbáním okrajových efektů, osa solenoidu je optickou osou).



Obrázek k 10: Magnetická čočka