Pracujte samostatně, podrobně popisujte, co a proč děláte, pište čitelně.

Hodnocení písemky a testu

F: 0–9.5 bodu, E: 10–11.5 bodu, D: 12–13.5 bodu, C:14–15.5 bodu, B:16–17.5 bodu, A: 18–20 bodů.

Písemka – Čas na vypracování je 90 minut.

(1) Spočtěte objem jehlanu omezeného rovinami

$$x - 2y + z = 0, \quad x + y - z = 0, \quad -x + y - z = 0, \quad x - z = 3. \qquad [4 \text{ body}]$$

(2) Spočtěte (čtyř)-objem paraboloidu tj. množiny $B = \{(x, y, z, w) \in \mathbf{R}^4 | x^2 + y^2 + z^2 \leq 2w, w \leq 1\}$. [4 body]

(3) Spočtěte gradient, divergenci a rotaci v tzv. parabolických souřadnicích

$$x = uv \cos\varphi, \ y = uv \sin\varphi, \ z = \tfrac{1}{2}(u^2 - v^2). \qquad [8 \text{ bodů}]$$

(4) Spočtěte tok vektorového pole $v = yze_x + zxe_y + xye_z$ plochou $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | (1-z)^2 = x^2+y^2, 0 \leq z \leq 1\}$. [4 body]

Test – Čas na vzpracování je 60 minut, každý příklad je za 2 body.

(1) Je dána podmnožina $X = (0, 1] \cap \mathbf{Q}$, ($\mathbf{Q}$ je množina racionálních čísel množiny reálných čísel $\mathbf{R}$, jež je uvažována s přirozenou topologií. Určete vnitřek X, vnějšek X, hranici X, uzávěr X a dále určete, zda X je otevřená, uzavřená či kompaktní.

(2) Je dána rovina $U = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | z = 0\}$. Dokažte, že U je množina míry nula.

(3) Dokažte, že funkce $f\colon (x, y) \mapsto x(y + 1)$ je integrovatelná na množině $M = [0, 1) \times [0, 1)$. Pomůcka: Napište výrazy pro horní a dolní součty a dokažte jejich limitní rovnost.

(4) Transformujte integrál $\int_0^1 \mathrm{d}\,x \int_0^1 \mathrm{d}\,y\ f(x, y)$ do nových proměnných $u = 1 + xy$ a $v = x - y$ (včetně mezí).

(5) Spočtěte kontrakci antisymetrické formy $\omega = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4$ vektorem $v = e_1 - e_2 + e_3 - e_4$.

(6) Ve standardních bazích je lineární zobrazení $\alpha\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ dáno maticí $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Určete $\Lambda^2\alpha^*$ (druhou vnější mocninu duálního zobrazení), tj. napište jeho matici vzhledem k libovolným Vámi pevně zvoleným bazím.

(7) Spočtěte divergenci vektorového pole

$$v \ = A(r, \varphi, z)e_r + B(r, \varphi, z)e_\varphi + C(r, \varphi, z)e_z,$$

jež je zadáno ve válcových souřadnicích (r, φ, z).

(8) Je dána diferenciální forma $\alpha = (y + 2z)\,\mathrm{d}\,z \wedge \mathrm{d}\,x - x\,\mathrm{d}\,y \wedge \mathrm{d}\,z$. Nalezněte β tak, že $\alpha = \mathrm{d}\,\beta$, nebo zdůvodněte, proč taková forma β neexistuje.

(9) Spočtěte tok vektorového pole $v = xe_x - ye_y + (x + y)e_z$ libovolnou uzavřenou plochou S v $\mathbf{R}^3$, x, y, z jsou kartézské souřadnice.

(10) Spočtěte integrál

$$\int_C \frac{x\,\mathrm{d}\,y - y\,\mathrm{d}\,x}{(x^2 + y^2)^2},$$

kde C je jednotková kružnice opsaná jednou v kladném směru otáčení. Můžeme k výpočtu integrálu využít Stokesovu větu? Vysvětlete!