Soubor příkladů do Integrování forem[1]

1. Topologie, spojitá zobrazení

Označení:
Vnitřek množiny $\mathcal{A}\dots\mathrm{int}\mathcal{A}$, vnějšek množiny $\mathcal{A}\dots\mathrm{ext}\mathcal{A}$, hranice množiny $\mathcal{A}\dots\mathrm{fr}\mathcal{A}$, uzávěr množiny $\mathcal{A}\dots\overline{\mathcal{A}}$.

1. Nalezněte všechny topologie na jednoprvkové (resp. dvouprvkové) množině.

2. Definujte *indukovanou topologii* na podmnožině a dokažte, že splňuje axiomy topologie.

3. Rozhodněte o otevřenosti, resp. uzavřenosti následujících podmnožin v $\mathbf{R}$ s přirozenou (resp. triviální, resp. diskrétní topologií):
(a) $[0,\infty)$.
(b) $(0,1)$.
(c) $[0,1]$.
(d) $[0,1)$.
(e) $\mathbf{N}$.
(f) $\mathbf{Q}$.
(g) $\{x\}\subset\mathbf{R}$.
Určete vnitřek, vnějšek, hranici a uzávěr jednotlivých množin.

4. Řešte úlohu 3. pro podmnožiny $\mathbf{R}_0^+$ s příslušnou indukovanou topologií.

5. Určete vnitřek, vnějšek a hranici množiny $\mathcal{A}\subset\mathbf{R}^n$ (s přirozenou topologií) v následujících případech:
(a) $\mathcal{A}=\{x\in\mathbf{R}^n \mid |x|\leq 1\}$.
(b) $\mathcal{A}=\{x\in\mathbf{R}^n \mid |x|= 1\}$.
(c) $\mathcal{A}=[0,1]\cap\mathbf{Q}$.

6. Uvažujte o systému podmnožin σ množiny $\mathcal{X}$ splňující tyto podmínky:
(i) $\emptyset,\mathcal{X}\in\sigma$.
(ii) Sjednocení libovolných dvou množin ze systému σ patří do systému σ.
(iii) Průnik libovolného počtu množin ze systému σ patří do systému σ.
Dokažte, že systém množin $\tau=\{\mathcal{U}\subset\mathcal{X}|\mathcal{U}=\mathcal{X}\backslash\mathcal{A},\ \mathcal{A}\in\sigma\}$ je topologie na $\mathcal{X}$ a systém všech uzavřených množin v topologii τ splývá se systémem σ.

7. Dokažte:
(a) Pro libovolnou množinu $\mathcal{A}\subset\mathcal{X}$ je množina $\mathrm{int}\mathcal{A}$ největší otevřená množina ležící v $\mathcal{A}$.
(b) Množina $\mathcal{A}$ je otevřená $\Longleftrightarrow\mathcal{A}=\mathrm{int}\mathcal{A}$.
(c) $\mathcal{B}\subset\mathcal{A}\Longrightarrow\mathrm{int}\mathcal{B}\subset\mathrm{int}\mathcal{A}$, $\mathrm{ext}\mathcal{B}\supset\mathrm{ext}\mathcal{A}$.
(d) Pro libovolnou množinu $\mathcal{A}\subset\mathcal{X}$ platí $\mathrm{fr}\mathcal{A}=\mathrm{fr}(\mathcal{X}\backslash\mathcal{A})$.

[1] Vybráno z:
Krupka, D., Musilová, J. *Integrální počet na Euklidových prostorech a diferencovatelných varietách.* Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1982.
Krupka, D., Krupková, O. *Topologie a geometrie (Přednášky a řešené úlohy.) 1. Obecná topologie.* Praha, Státní pedagogické nakladatelství, 1989.
Spivak, M. *Calculus on Manifolds. A Modern Approach to Classical Theorems of Advanced Calculus.* Perseus Books Publishing, 1998.

8. Dokažte:
(a) $\overline{\mathcal{A}}$ je nejmenší uzavřená množina obsahující $\mathcal{A}$.
(b) Množina $\mathcal{A}$ je uzavřená $\iff \mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}}$.

9. Dokažte:
(a) $\overline{\emptyset} = \emptyset$.
(b) $\overline{\overline{\mathcal{A}}} = \overline{\mathcal{A}}$.
(c) $\overline{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}} = \overline{\mathcal{A}} \cup \overline{\mathcal{B}}$.

10. Charakterizujte množiny, pro které platí: $\mathrm{fr}(\mathcal{A}) = \emptyset$.

Nechť $\mathcal{X}$ je množina a $f : \mathcal{P}\mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{P}\mathcal{X}$ je zobrazení systému podmnožin množiny $\mathcal{X}$ do sebe. Podmínky
(i) $f(\emptyset) = \emptyset$,
(ii) pro libovolnou množinu $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ platí: $\mathcal{A} \subset f(\mathcal{A})$,
(iii) pro libovolnou množinu $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ platí: $f(f(\mathcal{A})) = f(\mathcal{A})$,
(iv) pro libovolné dvě množiny $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}$ platí: $f(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = f(\mathcal{A}) \cup f(\mathcal{B})$,
se nazývají *Kuratowského axiomy uzávěru.*

11. Dokažte, že Kuratowského axiomy uzávěru lze použít k zavedení topologie.

Bází topologie τ rozumíme podsystém σ systému τ takový, že každá neprázdná množina z τ je sjednocením nějakých množin ze systému σ.

Platí: Systém σ je bází nějaké topologie na $\mathcal{X}$ právě tehdy, když jsou splněny podmínky:
(i) σ pokrývá $\mathcal{X}$.
(ii) K libovolným dvěma množinám $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \sigma$ a libovolnému bodu $x \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ existuje $\mathcal{W} \in \sigma$ tak, že $x \in \mathcal{W} \subset \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$.
Dokažte.

12. Rozhodněte, zda následující systémy podmnožin množiny $\mathcal{X}$ jsou topologie na $\mathcal{X}$ (resp. zda tvoří bázi nějaké topologie) a zdůvodněte:
(a) $\mathcal{X} = \{a, b, c\}, \tau = \{\emptyset, \mathcal{X}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a\}\}$.
(b) $\mathcal{X} = \mathcal{R}, \tau = \{\emptyset, (-a, a)\}$, kde $a \in \mathcal{R}^+$.
(c) $\mathcal{X} = \mathcal{R}^2, \tau = \mathcal{U} \times \mathcal{V}$, kde $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ probíhají všechny množiny otevřené v přirozené topologii.

13. Ukažte, že zleva uzavřené a zprava otevřené intervaly v množině $\mathbf{R}$ tvoří bázi topologie (tzv. *Sorgenfreyova topologie).*

14. Řešte úlohu 3. pro Sorgenfreyovu topologii.

15. Dokažte, že uzavřený interval v $\mathbf{R}$ s přirozenou topologií je kompaktní množina.

16. Dokažte, že množina v $\mathbf{R}^n$ s přirozenou topologií je kompaktní právě tehdy, když je uzavřená a omezená.

17. Rozhodněte o kompaktnosti následujících množin v přirozené topologii:
(a) $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq r^2,\ r>0,\ (x,y) \neq (0,0)\}$.
(b) $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \leq 0\}$.
(c) $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = \frac{1}{x},\ 0 < x \leq 1\}$.
(d) $[0,1] \cap \mathbf{Q}$.
(e) $\{x \in \mathbf{R} \mid x = \frac{1}{n},\ n = 1, 2 \ldots\}$.
(f) $\{x \in \mathbf{R} \mid x = \frac{1}{n},\ n = 1, 2 \ldots\} \cup \{0\}$.

18. Nechť $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ je zobrazení topologických prostorů. Dokažte, že následující podmínky jsou ekvivalentní:
(a) f je spojité.
(b) Pro libovolnou množinu $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ platí: $f(\overline{\mathcal{A}}) \subset \overline{f(\mathcal{A})}$.
(c) Vzor libovolné uzavřené množiny v $\mathcal{Y}$ je uzavřená množina v $\mathcal{X}$.
(d) Vzor libovolné otevřené množiny v $\mathcal{Y}$ je otevřená množina v $\mathcal{X}$.

Nechť τ_1 (resp. τ_2) jsou dvě topologie na $\mathcal{X}$. Topologii τ_1 nazveme *silnější* než τ_2 (resp. τ_2 *slabší* než τ_1), jestliže $\tau_2 \subset \tau_1$.

19. Dokažte následující tvrzení:
(a) Identita $(\mathcal{X}, \tau_1) \to (\mathcal{X}, \tau_2)$ je spojitá $\Longleftrightarrow$ τ_1 je silnější než τ_2.
(b) Spojitost zobrazení $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ se nenaruší, jestliže zesílíme topologii na $\mathcal{X}$ nebo zeslabíme topologii na $\mathcal{Y}$.
(c) Každé zobrazení z diskrétního topologického prostoru do libovolného topologického prostoru je spojité.
(d) Každé zobrazení z libovolného topologického prostoru do triviálního topologického prostoru je spojité.
(e) Každé spojité zobrazení z triviálního do diskrétního topologického prostoru je konstantní.

20. Vyšetřete spojitost zobrazení $f(x) = x^2$, $f(x) = x$ z množiny $\mathbf{R}$ s přirozenou topologií do množiny $\mathbf{R}$ s topologií přirozenou (resp. triviální, resp. diskrétní).

21. Uvažte množinu $\mathcal{X} = \{1,2,3,4,5\}$ a systém podmnožin

$$\sigma = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,5\}\}\,.$$

Dokažte, že tento systém tvoří bázi topologie a tuto topologii určete. Nechť $f, g, h : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ jsou zobrazení definovaná vztahy:
$f(1) = 1,\ f(2) = 1,\ f(3) = 2,\ f(4) = 4,\ f(5) = 5,$
$g(1) = 3,\ g(2) = 1,\ g(3) = 2,\ g(4) = 5,\ g(5) = 1,$
$h(1) = 3,\ h(2) = 2,\ h(3) = 3,\ h(4) = 4,\ h(5) = 4\,.$
Určete jejich body nespojitosti.

22. Určete Jacobiho matici zobrazení:
(a) $f\,(x,y,z) = (x^y,\ \sin xy)$,
(b) $f\,(x,y) = (x+y,\ x.y,\ 2x \sin y)$.

2. Riemannův integrál na n–rozměrném euklidovském prostoru

1. Funkce $f : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ je definována vztahem

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbf{Q}, \\ 1, & x \notin \mathbf{Q}. \end{cases}$$

   Zjistěte, zda je integrabilní.

2. Dokažte integrabilitu funkce $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ definované vztahem $f(x) = x$ a vypočtěte $\int_{[a,b]} f$.

3. Dokažte integrabilitu funkce $f : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ definované vztahem $f(x,y) = x + y$ a vypočtěte $\int_{[0,1]\times[0,1]} f$.

4. Funkce $f : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ je definována vztahem

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < \frac{1}{2}, \\ 1, & \frac{1}{2} \le x \le 1. \end{cases}$$

   Dokažte, že funkce je integrabilní, a vypočtěte $\int_{[0,1]\times[0,1]} f$.

5. Nechť $\mathcal{A} \subset \mathbf{R}$, $f, g : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{R}$ jsou integrabilní funkce.

   (a) Nechť P je libovolné dělení kvádru $\mathcal{A}$ a $\mathcal{S} \in P$ libovolný kvádr tohoto dělení. Ukažte, že platí:

$$m_{\mathcal{S}}(f) + m_{\mathcal{S}}(g) \le m_{\mathcal{S}}(f+g), \quad M_{\mathcal{S}}(f) + M_{\mathcal{S}}(g) \ge M_{\mathcal{S}}(f+g),$$

   tj.

$$L(f,P) + L(g,P) \le L(f+g,P), \quad U(f,P) + U(g,P) \ge U(f+g,P).$$

   (b) Ukažte, že funkce $f+g$ je integrabilní na $\mathcal{A}$ a platí: $\int_{\mathcal{A}} (f+g) = \int_{\mathcal{A}} f + \int_{\mathcal{A}} g$.

   (c) Ukažte, že pro libovolnou konstantu c platí: $\int_{\mathcal{A}} cf = c\int_{\mathcal{A}} f$.

   (d) Pro $\mathcal{A} = [a,b] \subset \mathbf{R}$ ukažte, že funkce $f(x) = px + q$, kde p, q jsou konstanty, je integrabilní a vypočtěte $\int_{[a,b]} f$.

6. Nechť $f, g : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{R}$ jsou funkce integrabilní na $\mathcal{A}$ a nechť na $\mathcal{A}$ platí $f \le g$. Ukažte, že platí $\int_{\mathcal{A}} f \le \int_{\mathcal{A}} g$.

7. Nechť $\mathcal{A} \subset \mathbf{R}^n$ a $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{R}$ je integrabilní na $\mathcal{A}$. Ukažte, že $|\int_{\mathcal{A}} f| \le \int_{\mathcal{A}} |f|$.

8. Nechť $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{R}$, $\mathcal{A} \subset \mathbf{R}^n$ je integrabilní na $\mathcal{A}$ a $g : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{R}$ je taková funkce, pro niž $f = g$ s výjimkou konečného počtu bodů kvádru $\mathcal{A}$. Ukažte, že g je integrabilní a platí $\int_{\mathcal{A}} f = \int_{\mathcal{A}} g$.

9. Dokažte integrabilitu funkce $f : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ definované vztahem

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{q}, & x, y \in \mathbf{Q},\ x = \frac{p}{q},\ p, q \geq 1 \text{ nesoudělná}, \\ \\ 1, & \text{v ostatních případech.} \end{cases}$$

10. Ukažte, že kvádr $[a^1, b^1] \times \ldots \times [a^n, b^n]$ nemůže mít objem nula, je-li $a^i < b^i$ pro každé i.

11. (a) Ukažte, že hranice množiny objemu nula má objem nula.
    (b) Uveďte příklad ohraničené nulové množiny, jejíž hranice není nulová.
    (c) Ukažte, že neohraničená množina nemůže mít objem nula.
    (d) Uveďte příklad uzavřené nulové množiny, která nemá objem nula.

12. Nechť $\mathcal{A} \subset \mathbf{R}^n$ je uzavřený kvádr, $f, g : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{R}$ jsou integrabilní funkce. Ukažte, že funkce $h = f.g$ je na $\mathcal{A}$ rovněž integrabilní.

13. Nechť $\mathcal{C}$ je množina objemu nula. Ukažte, že existuje uzavřený kvádr $\mathcal{A}$ tak, že $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$. Dále ukažte, že $\mathcal{C}$ je jordanovsky měřitelná a $\int_{\mathcal{A}} \chi_{\mathcal{C}} = 0$.

14. Uveďte příklad ohraničené množiny míry nula, pro kterou $\int_{\mathcal{A}} \chi_{\mathcal{C}}$ neexistuje.

15. Nechť $\mathcal{C}$ je ohraničená nulová množina, pro niž existuje $\int_{\mathcal{A}} \chi_{\mathcal{C}}$. Ukažte, že tento integrál je roven nule.

16. Nechť $f : \mathcal{K} \longrightarrow \mathbf{R}$ je integrabilní funkce na uzavřeném kvádru $\mathcal{K}$ a $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ jsou dvě disjunktní podmnožiny $\mathcal{K}$. Dokažte, že

$$\int_{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}} f = \int_{\mathcal{A}} f + \int_{\mathcal{B}} f.$$

17. Ukažte, že pro integrabilní funkce $f : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ platí:

$$\int_a^b \int_a^y f\,(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \int_x^b f\,(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

18. Vypočtěte integrál $\int_{\mathcal{A}} f$, kde $f\,(x,y) = \sqrt{xy}$ a $\mathcal{A}$ je množina omezená křivkami $xy = 2$, $xy = 5$, $y = x$, $y = 4x$ pro $x > 0$. Výpočet proveďte:
    (a) v kartézských souřadnicích,
    (b) ve vhodných transformovaných souřadnicích.

19. Vypočtěte obsah obrazce omezeného přímkami $2x - y = -7$, $2x - y = -14$, $x - 3y = 0$, $x - 3y = 6$. Výpočet proveďte:
    (a) v kartézských souřadnicích,
    (b) ve vhodných transformovaných souřadnicích.

Dále: výpočty obsahů, objemů, momentů setrvačnosti, hmotností, středů hmotnosti (je-li dána hustota) $\ldots$, například:

20. Vypočtěte objem tělesa:

   (a) $\mathcal{A} = \left\{(x, y, z)\,,\ z \geq \sqrt{x^2 + y^2},\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}$,

   (b) $\mathcal{A} = \left\{(x, y, z)\,,\ z \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 2R^2,\ x + y + z \leq 2a,\ a > R\sqrt{2}\right\}$.

21. Vypočtěte objem anuloidu.

22. Vypočtěte:

   (a) Moment setrvačnosti tenké kruhové desky o konstantní hustotě ρ vzhledem k ose ležící v rovině desky a procházející jejím středem.

   (b) Tenká homogenní deska ve tvaru elipsy o poloosách a, b je umístěna v rovině Oxy tak, že střed elipsy splývá s počátkem O soustavy souřadnic. Vypočtěte polohu středu hmotnosti části elipsy ležící v prvním kvadrantu.

3. Prostory kovariantních tenzorů

1. (a) Ukažte, že množina $T^k E$ všech k–tenzorů na vektorovém prostoru E spolu s operací sečítání a násobení skalárem tvoří vektorový prostor.

   (b) Ukažte, že množina všech antisymetrických tenzorů $\bigwedge^k E$ tvoří vektorový podprostor tohoto prostoru.

2. Ukažte, že skalární součin dvou vektorů ξ, $\eta \in \mathbf{R}^n$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, definovaný vztahem

$$(\xi, \eta) = \xi . \eta = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\, \eta_i\,,$$

   je 2–tenzor na $\mathbf{R}^n$.

3. Ukažte, že tenzorový součin dvou tenzorů je opět tenzorem.

4. Na konkrétním příkladě ukažte, že operace tenzorového součinu není komutativní.

5. Pro tenzory u, u_1, $u_2 \in T^k E$, v, v_1, $v_2 \in T^l E$, $w \in T^m E$ a reálné číslo a dokažte:

   (a) $(u_1 + u_2) \otimes v \;= u_1 \otimes v \;+ u_2 \otimes v$,

   (b) $u \otimes (v_1 + v_2) = u \otimes v_1 + u \otimes v_2$,

   (c) $(au) \otimes v \;= u \otimes (av) = a\,(u \otimes v)$,

   (d) $(u \otimes v) \otimes w = u \otimes (v \otimes w)$.

6. Pro antisymetrické tenzory ω, ω_1, $\omega_2 \in \bigwedge^k E$, η, η_1, $\eta_2 \in \bigwedge^l E$, $\theta \in \bigwedge^m E$ a reálné číslo a dokažte:

   (a) $(\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta \;= \omega_1 \wedge \eta \;+ \omega_2 \wedge \eta$,

   (b) $\omega \wedge (\eta_1 + \eta_2) = \omega \wedge \eta_1 + \omega \wedge \eta_2$,

   (c) $(a\omega) \wedge \eta \;= \omega \wedge (a\eta) = a\,(\omega \wedge \eta)$,

   (d) $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl}\, \eta \wedge \omega$,

   (e) $(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta)$.

7. Nechť $f : E \longrightarrow F$ je lineární zobrazení vektorových prostorů. Pomocí tohoto zobrazení je definováno lineární zobrazení $f^* : T^k F \longrightarrow T^k E$ předpisem

$$(f^* u)(\xi_1, \ldots, \xi_k) = u(f(\xi_1), \ldots, f(\xi_k))$$

pro libovolné $u \in T^k F,\ \xi_1, \ldots, \xi_k \in E$. Dokažte:

   (a) $f^*(u \otimes v) = f^* u \otimes f^* v$ pro $u \in T^l F,\ v \in T^m F$,
   (b) $f^*(\omega \wedge \eta) = f^* \omega \wedge f^* \eta$ pro $\omega \in \bigwedge^l F,\ \eta \in \bigwedge^m F$.

8. Nechť $(e_1, \ldots, e_n)$ je standardní báze v $\mathbf{R}^n$, $(e^1, \ldots, e^n)$ je duální báze.

   (a) Pro libovolné vektory $\xi_1\ \xi_2, \xi_3 \in \mathbf{R}^n$ určete $e^i \otimes e^j(\xi_1, \xi_2)$, $\mathrm{Alt}(e^i \otimes e^j)(\xi_1, \xi_2)$, $e^i \wedge e^j(\xi_1, \xi_2)$, $e^i \wedge e^j \wedge e^k(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$.
   (b) Určete: $\mathrm{Alt}(e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_k})(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$, $\mathrm{Alt}(e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_k})(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k})$, $e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$, $e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_k}(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$.
   (c) Dokažte:
   $e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_s} \wedge e^{i_{s+1}} \wedge \ldots \wedge e^{i_k} = -e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_{s+1}} \wedge e^{i_s} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}$,
   $e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_r} \wedge \ldots \wedge e^{i_s} \wedge \ldots \wedge e^{i_k} = -e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_s} \wedge \ldots \wedge e^{i_r} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}$.

9. Nechť (e^1, e^2, e^3) je duální báze ke standardní bázi (e_1, e_2, e_3) vektorového prostoru $\mathbf{R}^3$. Vypočtěte $\omega \wedge \eta(\xi, \nu)$, kde $\omega = 2e^1 - e^3$, $\eta = e^1 + e^2$, $\xi, \nu \in \mathbf{R}^3$.

10. Nechť $(e_1, \ldots, e_n)$, $(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n)$ jsou dvě ortonormální báze vektorového prostoru $\mathbf{R}^n$, pro něž platí transformační vztahy $\bar{e}_i = a_i^j e_j$.

    (a) Odvoďte transformační vztahy mezi duálními bázemi $(e^1, \ldots, e^n)$, $(\bar{e}^1, \ldots, \bar{e}^n)$.
    (b) Odvoďte transformační vztahy mezi složkami vektorů v bázích $(e_1, \ldots, e_n)$, $(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n)$.
    (c) Odvoďte transformační vztahy mezi složkami lineárních forem v bázích $(e^1, \ldots, e^n)$, $(\bar{e}^1, \ldots, \bar{e}^n)$.

11. Nechť $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ je báze vektorového prostoru E, $\omega \in \bigwedge^n E$, $\zeta_i = a_i^j \xi_j \in E$. Ukažte, že $\omega(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) = \det\left(a_i^j\right) \omega(\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

4. Vektorová a tenzorová pole, diferenciální formy

1. Dokažte, že množina všech vektorových polí na $\mathbf{R}^n$ spolu s operacemi sečítání a násobení skalárem tvoří vektorový prostor. Jaká je dimenze tohoto vektorového prostoru?

2. Dokažte:

   (a) Množina všech diferenciálních k–forem na $\mathbf{R}^n$ spolu s operacemi sečítání a násobení skalárem tvoří vektorový prostor.
   (b) Množina všech spojitých k–forem na $\mathbf{R}^n$ tvoří vektorový podprostor tohoto prostoru.

3. Je-li vektorové pole na $\mathbf{R}^n$ spojité (resp. diferencovatelné) vzhledem k nějaké bázi vektorového prostoru $\mathbf{R}^n$, pak je spojité (resp. diferencovatelné) vzhledem k libovolné jiné bázi $\mathbf{R}^n$.

4. Je-li diferenciální forma na $\mathbf{R}^n$ spojitá (resp. diferencovatelná) vzhledem k nějaké bázi vektorového prostoru $\mathbf{R}^n$, pak je spojitá (resp. diferencovatelná) vzhledem k libovolné jiné bázi $\mathbf{R}^n$.

5. Dokažte, že vnější součin spojitých (resp. diferencovatelných) diferenciálních forem je spojitá (resp. diferencovatelná) diferenciální forma.

5. Vnější součin, vnější derivace

1. Nechť $\omega,\ \rho \in \bigwedge^k T\mathbf{R}^n,\ \eta \in \bigwedge^l T\mathbf{R}^n,\ c \in \mathbf{R}$. Dokažte:

   (a) $\mathrm{d}\,(\omega + \rho) = \mathrm{d}\omega + \mathrm{d}\rho$,

   (b) $\mathrm{d}\,(c\,\omega) = c\,\mathrm{d}\omega$,

   (c) $\mathrm{d}\,(\mathrm{d}\omega) = 0$,

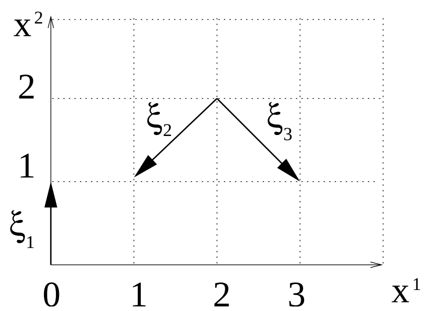
   (d) $\mathrm{d}\,(\omega \wedge \eta) = \mathrm{d}\omega \wedge \eta + (-1)^k\,\omega \wedge \mathrm{d}\eta$.

2. Nechť $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ je diferencovatelná funkce. Dokažte, že

$$\mathrm{d}f\,(p)\,(\xi) = \sum_{i=1}^{n} D_i f\,(p)\,\mathrm{d}x^i\,(p)\,(\xi)\,.$$

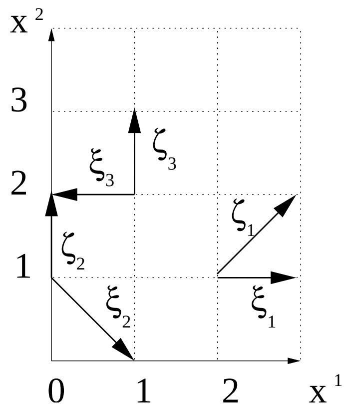
3. Nechť ν je vektor rychlosti příslušný rovinné křivce $x\,(t) = \cos t,\ y\,(t) = \sin t$ při $t = 0$. Vypočtěte hodnotu forem $\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}y$ v argumentu ν.

4. Vypočtěte hodnoty forem $\omega_1 = \mathrm{d}x^1,\ \omega^2 = x^1\mathrm{d}x^2$ a $\omega_3 = \mathrm{d}\,(r^2)\,,$ kde $r^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2$ ve vektorových argumentech $\xi_1,\ \xi_2$ a ξ_3 podle obrázku.



5. Vypočtěte hodnoty forem $\omega_1 = \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3,\ \omega_2 = x^1\mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^2$ a $\omega_3 = \mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}\,(r^2)\,,$ kde $r^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2\,,$ ve vektorech $\xi = (1,1,1)\,,\ \zeta = (1,2,3)$ umístěných v bodě $p = (2,0,0)$.

6. Vypočtěte hodnoty forem $\omega_1 = \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2,\ \omega_2 = x^1\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 - x^2\mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^1$ a $\omega_3 = r\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\varphi$, kde $x^1 = r\cos\varphi,\ x^2 = r\sin\varphi$, ve vektorových argumentech $(\xi_1,\zeta_1)\,,\ (\xi_2,\zeta_2)$ a (ξ_3,ζ_3) podle obrázku.



7. Je dána lineární forma $\omega = \left(\frac{1}{x^2}\right) \mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y$. Jaké zobrazení indukuje tato forma v bodě $(t, 0) \in \mathbf{R}^2$?

8. Nechť $g_1, g_2 : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ jsou diferencovatelné funkce takové, že $D_1 g_2 = D_2 g_1$. Nechť $\omega = g_1 \mathrm{d}x + g_2 \mathrm{d}y$. Ukažte, že existuje funkce (0-forma) $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ taková, že $\omega = \mathrm{d}f = D_1 f \mathrm{d}x + D_2 f \mathrm{d}y$.

Otevřená množina $\mathcal{A} \subset \mathbf{R}^n$ se nazývá *hvězdicovitou* vzhledem k bodu $O \in \mathcal{A}$, jestliže s každým bodem $x \in \mathcal{A}$ patří do množiny $\mathcal{A}$ také úsečka spojující bod x s bodem O.

Poincarého lemma: Nechť $\mathcal{A} \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená hvězdicovitá množina a ω diferenciální forma na $\mathcal{A}$ taková, že $\mathrm{d}\omega = 0$ (forma ω je *uzavřená*). Pak existuje diferenciální forma η na $\mathcal{A}$ taková, že $\mathrm{d}\eta = \omega$. (Jinými slovy: Každá *uzavřená* forma definovaná na otevřené hvězdicovité množině je *exaktní.*)

9. Pro následující formy ω určete $\mathrm{d}\omega$. Rozhodněte, zda jsou uvedené formy exaktní. V kladném případě určete formu η, pro niž $\mathrm{d}\eta = \omega$. Charakterizujte definiční obory.

   (a) $\omega = (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}x + (5 - 2xy)\,\mathrm{d}y$,

   (b) $\omega = \sin x \mathrm{d}x + \frac{1}{y^2} \mathrm{d}y$,

   (c) $\omega = (4x^3 + 3x^2 y)\,\mathrm{d}x + (x^3 + 6y)\,\mathrm{d}y$,

   (d) $\omega = x^2 y \mathrm{d}x + \cos x \sin y \mathrm{d}y$,

   (e) $\omega = x\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + y\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z - z^2 \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$,

   (f) $\omega = (x + 3y)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$.

6. Inverzní obraz (pullback) zobrazením podmnožin euklidovských prostorů

1. Nechť $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m$, $g : \mathbf{R}^m \longrightarrow \mathbf{R}^s$, $h : \mathbf{R}^m \longrightarrow \mathbf{R}$ jsou diferencovatelné funkce, ω_1, ω_2, $\omega \in \bigwedge^k T\mathbf{R}^m$, $\eta \in \bigwedge^l T\mathbf{R}^m$. Dokažte:

   (a) $T_p(g \circ f) = T_{f(p)}g \circ T_p f$,

   (b) $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$,

   (c) Je-li $f, g : \mathbf{R}^m \longrightarrow \mathbf{R}$, pak $\mathrm{d}\,(f.g) = f.\mathrm{d}g + g.\mathrm{d}f$,

   (d) $f^*\,(\omega_1 + \omega_2) = f^*\omega_1 + f^*\omega_2$,

   (e) $f^*\,(h\omega) = (h \circ f)\, f^*\omega$,

   (f) $f^*\,(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta$,

   (g) $f^*\,(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}f^*(\omega)$.

2. Nechť $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m$ je diferencovatelná funkce, x^i (resp. y^j) standardní souřadnice na $\mathbf{R}^n$ (resp. $\mathbf{R}^m$). Určete $f^*\mathrm{d}y^j$. Na jaké množině je tato forma definována?

3. Nechť $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ je diferencovatelná funkce daná obecným předpisem

$$f\left(x^1, \dots, x^n\right) = \left(y^1, \dots, y^n\right),$$

   tj. $y^i = f^i\,(x^1, \dots, x^n)$ pro $i = 1, \dots, n$. Označme $\omega = \mathrm{d}y^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}y^n$ *element objemu*. Ukažte, že platí $f^*\omega = \det\,(Df)\,\eta$, kde $\eta = \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n$ a Df je Jacobiho matice zobrazení f.

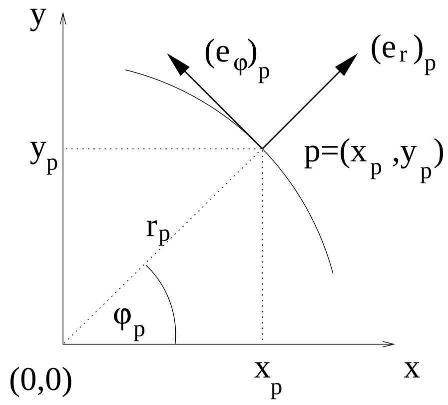
4. Nechť c je *diferencovatelný oblouk* v $\mathbf{R}^n$, tj. diferencovatelná funkce $c : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}^n$. Definujeme tečný vektor ξ k oblouku c v bodě t vztahem $\xi = T_t c.e_t = \left((c^1)'\,(t), \dots, (c^n)'\,(t)\right)_{c(t)}$, kde $e_t = (t, e)$ a e je jednotkový vektor v $\mathbf{R}$. Ukažte, že pro diferencovatelnou funkci $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m$ je vektor $T_{c(t)}f.\xi$ tečným vektorem ke křivce $f \circ c$ v bodě t.

5. Nechť $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ je diferencovatelná funkce a $c : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^2$ je diferencovatelný oblouk definovaný vztahem $c\,(t) = (t, f\,(t))$. Ukažte, že koncový bod tečného vektoru vedeného k oblouku v bodě t leží na tečně ke grafu f, vedené v bodě $(t, f\,(t))$.

6. Definujme diferencovatelné zobrazení $f : \{r \mid r > 0\} \times (0, 2\pi) \longrightarrow \mathbf{R}^2$ vztahem $f\,(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) = (x, y)$. Vyjádřete $f^*\mathrm{d}x$, $f^*\mathrm{d}y$ a $f^*\left(\frac{\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y}{x^2+y^2}\right)$.

7. Definujme diferencovatelné zobrazení $f : \{r \mid r > 0\} \times (0, 2\pi) \times (0, \pi) \longrightarrow \mathbf{R}^3$ vztahem $f\,(r, \varphi, \vartheta) = (r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta) = (x, y, z)$. Vyjádřete $f^*\mathrm{d}x$, $f^*\mathrm{d}y$, $f^*\,(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y)$, $f^*\,(\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z)$, $f^*\,(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z)$, $f^*\,(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z)$.

8. Nechť P je inverzní zobrazení k f z úlohy 6. (tzv. *systém polárních souřadnic* na $\mathbf{R}^2$. Nechť $p \in \mathbf{R}^2$, $p \neq (0,0)$, nechť $(e_r)_p$, $(e_\varphi)_p$ jsou jednotkové vektory báze prostoru $T_p\mathbf{R}^2$ zvolené podle obrázku. Určete $P^*\mathrm{d}r\,(p)\left((e_r)_p\right)$, $P^*\mathrm{d}r\,(p)\left((e_\varphi)_p\right)$, $P^*\mathrm{d}\varphi\,(p)\left((e_r)_p\right)$, $P^*\mathrm{d}\varphi\,(p)\left((e_\varphi)_p\right)$.



9. Nechť $\mathbf{R}^2_{(r,\varphi)}$ je tečný prostor k podmnožině $\mathcal{B} \subset \mathbf{R}^2$, $\mathcal{B} = (0,\infty) \times (0, 2\pi)$ v bodě $q = (r, \varphi) = P(x, y)$ (viz. úloha 8.). Najděte duální bázi k bázi $\mathrm{d}r(q)$, $\mathrm{d}\varphi(q)$ v bodě q, tj. vektory $(\bar{e}_r)_q$, $(\bar{e}_\varphi)_q$ takové, že

$$\mathrm{d}r(q)\left((\bar{e}_r)_q\right) = 1, \qquad \mathrm{d}r(q)\left((\bar{e}_\varphi)_q\right) = 0,$$

$$\mathrm{d}\varphi(q)\left((\bar{e}_r)_q\right) = 0, \qquad \mathrm{d}\varphi(q)\left((\bar{e}_\varphi)_q\right) = 1.$$

7. Integrál diferenciální formy na singulární krychli

1. Nechť $c : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}^3$ je jednorozměrná singulární krychle (oblouk v $\mathbf{R}^3$), $c(t) = (x, y, z) = (c^1(t), c^2(t), c^2(t))$, $\omega = P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$ je lineární diferenciální forma v $\mathbf{R}^3$. Vyjádřete integrál $\int_c \omega$ pomocí integrálu $\int_{[0,1]}$.

2. Nechť $c : [0,1]^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ je dvojrozměrná singulární krychle, $c(t^1, t^2) = (x, y, z) = (c^1(t^1,t^2), c^2(t^1,t^2), c^3(t^1,t^2))$, $\omega = P(x,y,z)\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R(x,y,z)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ je diferenciální 2-forma v $\mathbf{R}^3$. Vyjádřete integrál $\int_c \omega$ pomocí integrálu $\int_{[0,1]^2}$.

   V následujících příkladech vyjádřete zadané křivky jako jednorozměrné singulární krychle (příp. řetězce) a vypočtěte křivkové integrály užitím vztahu

$$\int_c \omega = \int_{[0,1]} c^* \omega\,.$$

3. $\omega = xy\mathrm{d}x + (x+y)\,\mathrm{d}y$, křivka c spojující počátek soustavy souřadnic s bodem $(1,1)$ je:

   (a) část přímky $y = x$,

   (b) část paraboly $y = x^2$,

   (c) lomená čára s úseky rovnoběžnými s osami x, y.

4. $\omega = -x\mathrm{d}x - y\mathrm{d}y$, c je oblouk elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ v prvním kvadrantu.

5. $\omega = \frac{1}{z\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\left(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z\right)$, c je úsečka s krajními body (a, b, c), $(2a, 2b, 2c)$.

6. $\omega = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y\right)$, c je oblouk kružnice spojující body $M = (1, 1, 0)$ a $N = (0, 1, 1)$, $S = (0, 0, 1)$ je její střed.

7. $\omega = \mathrm{d}x$, c je čtvrtkružnice o poloměru r:
   (a) v prvém kvadrantu,
   (b) mezi body $\left(\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$ a $\left(-\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$,
   (c) ve třetím kvadrantu.

Vypočtěte následující plošné integrály:

8. $\int_{\mathcal{S}} x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$, kde $\mathcal{S}$ je krychle $x = y = z = 0,\ x = y = z = 1$.

9. $\int_{\mathcal{S}} x^2y^2z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$, $\mathcal{S}$ je dolní polokoule $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

10. $\int_{\mathcal{S}} z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$, $\mathcal{S}$ je $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

11. $\int_{\mathcal{S}} z^2\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$, $\mathcal{S}$ je $\frac{x^2}{a^2} + (y^2 + b^2) + (z^2 + c^2) = 1$.

12. $\int_{\mathcal{S}} yz\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + xz\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + xy\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$, $\mathcal{S}$ je plocha omezená takto: $x^2 + y^2 = R^2$, $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ z = H > 0$.

8. Stokesův teorém

1. Pro zadané $R > 0$ a celé číslo $n \neq 0$ definujeme jednorozměrnou singulární krychli $c_{R,n} : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}^2 \backslash \{0\}$ vztahem $c_{R,n}(t) = (R\cos 2\pi nt, R\sin 2\pi nt)$. Ukažte, že pro dvojrozměrnou singulární krychli $c : [0,1]^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2 \backslash \{0\}$ definovanou vztahem $c(t^1, t^2) = ((R_1 + t^2(R_2 - R_1))\cos 2\pi nt^1, (R_1 + t^2(R_2 - R_1))\sin 2\pi nt^1)$ platí: $\partial c = c_{R_1,n} - c_{R_2,n}$.

V následujících příkladech 2.–6. vyjádřete zadané okraje ∂c jako jednorozměrné singulární krychle (příp. řetězce) a užitím Stokesovy věty

$$\int_c \mathrm{d}\omega = \int_{\partial c} \omega = \int_{[0,1]} (\partial c)^* \omega$$

převeďte plošné integrály na křivkové.

2. $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$, ∂c je elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

3. $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$, ∂c je asteroida $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ t \in [0, 2\pi)$.

4. $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$, ∂c je kardioida $x = 2a\cos t - a\cos 2t$, $y = 2a\sin t - a\sin 2t$, $t \in [0, 2\pi)$.

5. $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$, ∂c je Descarteův list $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (návod: parametrické vyjádření $y = tx$)

6. $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$, ∂c je větev křivky $(x+y)^3 = xy$ (návod: parametrické vyjádření $y = tx$, $t = -\ln(1-s)$, $s \in (0,1)$).

7. Vypočtěte, je-li to možné, integrály z příkladů 8.–12. části 7. užitím Stokesovy věty.

9. Aplikace: Práce silového pole po křivce, tok vektorového pole plochou

1. Určete práci síly $\vec{F}$, jejíž působiště se pohybuje po dané křivce γ:
   (a) $\gamma = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = R^2,\ x, y \geq 0\}$ s orientací ve směru pohybu hodinových ručiček, síla $\vec{F}$ má konstantní velikost a má směr kladné osy x.
   (b) $\vec{F} = (xy, x+y)$,
      (b1) γ je úsek přímky $y = x$ mezi body $(0,0)$ a $(1,1)$,
      (b2) γ je úsek paraboly $y = x^2$ mezi body $(0,0)$ a $(1,1)$,
      (b3) γ je lomená čára se stranami rovnoběžnými s osami soustavy souřadnic mezi body $(0,0)$ a $(1,1)$.
   (c) Síla směřuje do počátku soustavy souřadnic, její velikost je číselně rovna vzdálenosti působiště od počátku; γ je oblouk elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ orientovaný proti směru pohybu hodinových ručiček:
      (c1) v prvním kvadrantu,
      (c2) ve všech kvadrantech (celá elipsa): výpočet proveďte přímo i užitím Stokesovy věty.
   (d) $\vec{F} = (X(x,y,z), Y(x,y,z), Z(x,y,z))$, síla směřuje k počátku soustavy souřadnic a její velikost je nepřímo úměrná vzdálenosti působiště od roviny $z = 0$; γ je úsek přímky mezi body (a,b,c) a $(2a, 2b, 2c)$.
   (e) Velikost síly $\vec{F}$ je nepřímo úměrná vzdálenosti působiště od osy z, síla je kolmá k ose z a směřuje k ní; γ je úsek kružnice $x = \cos t$, $y = 1$, $z = \sin t$ mezi body $M = (1,1,0)$ a $N = (0,1,1)$.

2. V následujících příkladech silových polí ukažte nezávislost práce síly na volbě křivky, určete odpovídající potenciální energii a vypočtěte práci síly po oblouku mezi body A, B:
   (a) $\vec{F} = (2xy, x^2)$, $A = (1,0)$, $B = (0,3)$.
   (b) $\vec{F} = (0, 0, -mg)$ (tíhová síla v blízkosti povrchu Země), $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$.
   (c) $\vec{F} = \left(-\frac{\mu x}{r^3}, -\frac{\mu y}{r^3}, -\frac{\mu z}{r^3}\right)$, kde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $A = (a,b,c)$, $B \to \infty$. (Určete konstantu μ, je-li $\vec{F}$ gravitační síla, kterou na částici m působí částice M.)

(d) $\vec{F} = -k^2\,(x,y,z)$, $k = konst.$ (síla pružnosti), $A \in \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = R^2\}$, $B \in \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = r^2\}$, $R > r$.

(e) $\vec{F} = \left(-\frac{y}{(x-y)^2}, \frac{x}{(x-y)^2}\right)$, $A = (0,-1)$, $B = (1,0)$, γ neprotíná přímku $y = x$.

(f) $\vec{F} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + x\right)$, $A = (0,0)$, $B = (1,1)$.

(g) $\vec{F} = \left(\frac{yz}{xyz}, \frac{zx}{xyz}, \frac{xy}{xyz}\right)$, $A = (1,1,1)$, $B = \left(x, y, \frac{1}{xy}\right)$, γ leží v prvním oktantu.

3. Určete tok vektorového pole $\vec{F} = (2x, 3y^2 + xz, 0)$ pláštěm válce $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$, $z = H > 0$ orientovaným vnější normálou. Výpočet proveďte přímo i užitím Stokesovy věty.

4. Určete tok vektorového pole $\vec{F} = (x, z^2, 7xy)$ kruhem o poloměru R, který leží v rovině $z = 1$ a střed má v bodě $(0,0,1)$. Kruh je orientován normálou $\vec{n} = (0,0,-1)$.

5. Určete tok vektorového pole $\vec{F} = (0,0,z)$ povrchem tělesa

$$\mathcal{A} = \left\{(x,y,z) \mid z \geq \sqrt{x^2+y^2},\, x^2+y^2+z^2 \leq 1\right\}.$$

Povrch je orientovaný vnější normálou. Výpočet proveďte přímo i užitím Stokesovy věty.

6. Určete tok vektorového pole $\vec{F} = \mathrm{rot}\vec{G} = (x^2y, x^2 - y^2, xyz)$ povrchem krychle $x = y = z = 0$, $x = y = z = 1$ orientovaným vnější normálou. Výpočet proveďte přímo i užitím Stokesovy věty.

Klasické integrální věty (stručné opakování):

7. Odvoďte vztah pro tok vektoru intenzity $\vec{E}$ elektrostatického pole buzeného bodovým nábojem Q umístěným ve vakuu libovolnou uzavřenou plochou, která tento náboj obklopuje (*Gaussova věta elektrostatiky v integrálním tvaru*). Plocha je orientovaná vnější normálou.

8. Užitím výsledku předchozího příkladu odvoďte vztah $\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}$, kde ϱ je objemová hustota náboje a ε_0 je permitivita vakua (*Gaussova věta elektrostatiky v diferenciálním tvaru*).

9. Pro elektromotorické napětí indukované při elektromagnetické indukci platí vztah $U = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$, kde Φ je magnetický indukční tok plochou vymezenou obvodem. Užitím vztahu $\int_A^B \vec{E}\mathrm{d}\vec{r} = U_{AB}$ odvoďte vztah mezi intenzitou elektrického pole $\vec{E}$ a magnetickou indukcí $\vec{B}$

$$\mathrm{rot}\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}\,.$$

10. Aplikace: Integrál prvého druhu. Geometrické a fyzikální charakteristiky jednorozměrných, dvourozměrných a třírozměrných útvarů

1. Vypočtěte následující křivkové integrály:

   (a) $\int_c xy\mathrm{d}s,\ c$ je obvod čtverce $\mid x \mid + \mid y \mid = a > 0$.

   (b) $\int_c \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{x^2+y^2+4}},\ c$ je úsečka spojující body $O = (0,0),\ A = (1,2)$.

   (c) $\int_c \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s,\ c\colon\ x = a\,(\cos t + t\sin t),\ y = a\,(\sin t - t\cos t),\ 0 \le t \le 2\pi$ (evolventa kružnice).

   (d) $\int_c \frac{\mathrm{d}s}{x^2+y^2+z^2},\ c$ je prvý závit šroubovice $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt$.

2. Vypočtěte následující plošné integrály:

   (a) $\int_S (x+y+z)\,\mathrm{d}S,\ S$ je povrch krychle $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1$.

   (b) $\int_S (x^2+y^2)\,\mathrm{d}S,\ S$ je povrch koule $x^2+y^2+z^2 = a^2$.

   (c) $\int_S \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}S,\ S$ je boční povrch kužele $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0,\ 0 \le z \le b$.

3. Vypočtěte délku křivek:

   (a) oblouk kuželové šroubovice $x = a\mathrm{e}^t\cos t,\ y = a\mathrm{e}^t\sin t,\ z = a\mathrm{e}^t$ mezi body $O = (0,0,0)$ a $A = (a,0,a)$,

   (b) závit šroubovice $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt$,

   (c) oblouk cykloidy $x = a\,(t - \sin t),\ y = a\,(1 - \cos t),\ 0 \le t \le \pi$.

4. Vypočtěte povrch:

   (a) koule o poloměru R,

   (b) pláště kužele o poloměru podstavy r a výšce H,

   (c) pláště paraboloidu o rovnici $x^2+y^2-2z = 0$, jehož výška je H,

   (d) bočního povrchu parabolického válce $y = \frac{3}{8}x^2$ ohraničeného rovinami $x = 0$, $z = 0,\ z = x,\ y = 6$.

5. Vypočtěte objem:

   (a) elipsoidu o poloosách $a,\ b,\ c$,

   (b) kužele o poloměru podstavy r a výšce H,

   (c) tělesa $\mathcal{A} = \{(x,y,z) \mid z \ge 0,\ x^2+y^2 \le 1,\ z \le 2 - x^2 - y^2\}$,

   (d) anuloidu.

6. Vypočtěte hmotnost:

   (a) elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, jejíž lineární hustota je popsána funkcí $\mu\,(x,y) = \mid y \mid$,

   (b) prvého závitu šroubovice $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt$, je-li lineární hustota v daném bodě úměrná velikosti průvodiče tohoto bodu.

7. Vypočtěte střed hmotnosti:

   (a) půloblouku cykloidy $x = a\,(t - \sin t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$, $0 \leq \pi \leq 0$, jehož lineární hustota je konstantní,

   (b) kruhové výseče o středovém úhlu α, jejíž plošná hustota je konstantní,

   (c) homogenního kužele o poloměru podstavy r a výšce H.

   V případech (b) a (c) vhodně zvolte soustavu souřadnic.

8. Vypočtěte moment setrvačnosti vzhledem k ose z:

   (a) prvého závitu šroubovice $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, jehož lineární hustota je konstantní,

   (b) povrchu anuloidu, jehož plošná hustota je konstantní (útvar je symetrický podle osy z).

9. Vypočtěte celkovou tlakovou sílu, kterou působí kapalina na stěny a na dno válcové nádoby o poloměru R. Nádoba je umístěna v homogenním tíhovém poli Země tak, že vektor $\vec{g}$ je rovnoběžný s osou nádoby. Hladina je ve výšce H nade dnem.