Ve fyzice často potřebujeme řešit *Laplaceovu* rovnici

$$\Delta f(x,y,z)=0.$$

Symetrie problémů často vyžaduje řešit tuto rovnici v křivočarých souřadnicích. Nejčastěji se setkáme s potřebou získat řešení v kulových souřadnicích

$$\left.\begin{aligned} x &= r\sin\vartheta\cos\varphi \\ y &= r\sin\vartheta\sin\varphi \\ z &= r\cos\vartheta. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Za tímto účelem zapíšeme Laplaceův operátor působící na funkci v kulových souřadnicích ($h_r=1$, $h_\vartheta=r$, $h_\varphi=r\sin\vartheta$) a

$$\Delta f(r,\vartheta,\varphi)=\operatorname{div}\operatorname{grad} f=\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\vartheta\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial f}{\partial\vartheta}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right)\right]=$$
$$=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\frac{\partial f}{\partial\vartheta}+\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\vartheta^2}+\frac{\cos\vartheta}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}=0.$$

Dále postupujeme metodou separace proměnných, kterou lze aplikovat na určité typy parciálních diferenciálních rovnic. Budeme předpokládat, že

$$f(r,\vartheta,\varphi)=R(r)\Theta(\vartheta)\Phi(\varphi),$$

tzn. že $f$ je součinem tří funkcí jedné proměnné. Derivace podle této proměnné (tedy v prvním součiniteli podle $r$, ve druhém podle $\vartheta$, ve třetím podle $\varphi$) budeme značit $'$. Podle toho na jakou funkci ($R$, $\Theta$ nebo $\Phi$) budeme derivaci aplikova, poznáme, podle které proměnné derivujeme. Po dosazení tedy máme

$$R''\Theta\Phi+\frac{2}{r}R'\Theta\Phi+\frac{1}{r^2}R\Theta''\Phi+\frac{\cos\vartheta}{r^2\sin\vartheta}R\Theta'\Phi+\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}R\Theta\Phi''=0.$$

Celou rovnici nyní vynásobíme

$$\frac{r^2}{R\Theta\Phi},\quad R\neq 0,\Theta\neq 0,\Phi\neq 0$$

a dostaneme

$$\underbrace{\frac{r^2R''+2rR'}{R}}_{K}+\underbrace{\frac{\sin\vartheta\Theta''+\cos\vartheta\Theta'}{\sin\vartheta\Theta}+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\Phi''}{\Phi}}_{-K}=0.$$

První sčítanec v rovnici je funkcí pouze proměnné $r$, zatímco druhé dva sčítance jsou funkcí pouze proměnných $\vartheta$ a $\varphi$. Součet se ale musí pro všechny hodnoty $r$ a $\vartheta$, $\varphi$ rovnat nule. To nelze splnit jinak, než, že se první sčítanec bude rovnat nějaké konstantě $K$ a zbytek tedy konstantě $-K$ (viz nahoře).

Postup si ještě jednou zopakujeme u druhých dvou sčítanců. Musí tedy platit

$$\frac{\sin\vartheta\Theta''+\cos\vartheta\Theta'}{\sin\vartheta\Theta}+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\Phi''}{\Phi}=-K$$
$$\underbrace{\frac{\sin^2\vartheta\Theta''+\sin\vartheta\cos\vartheta\Theta'}{\Theta}+K\sin^2\vartheta}_{L}+\underbrace{\frac{\Phi''}{\Phi}}_{-L}=0.$$

Zase je první složená závorka rovna nějaké konstantě $L$ a druhá tedy $-L$. Vyřešíme napřed rovnici, která vznikne z druhé závorky, tedy

$$\Phi''+L\Phi=0.$$

To je rovnice pro harmonický oscilátor a jejím řešením je

$$\Phi=A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{L}\varphi}.$$

Dále ovšem požadujeme, aby $\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi)$ a to bude splněno pouze pokud $L=m^2$, kde $m\in\mathbb{Z}$ je celé číslo.

Věnujme se nyní rovnici v první složené závorce, kterou jednoduše upravíme na

$$\sin^2\vartheta\Theta''+\sin\vartheta\cos\vartheta\Theta'+(K\sin^2\vartheta-m^2)\Theta=0$$

a provedeme substituci $z = \cos\vartheta$. Z toho plyne

$$\frac{\mathrm{d}\,\Theta}{\mathrm{d}\,\vartheta} = \frac{\mathrm{d}\,\Theta}{\mathrm{d}\,z}\frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,\vartheta} = -\sin\vartheta\frac{\mathrm{d}\,\Theta}{\mathrm{d}\,z}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2\,\Theta}{\mathrm{d}\,\vartheta^2} = \frac{\mathrm{d}^2\,\Theta}{\mathrm{d}\,z^2}\left(\frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,\vartheta}\right)^2 + \frac{\mathrm{d}\,\Theta}{\mathrm{d}\,z}\frac{\mathrm{d}^2\,z}{\mathrm{d}\,\vartheta^2} = \sin^2\vartheta\frac{\mathrm{d}^2\,\Theta}{\mathrm{d}\,z^2} - \cos\vartheta\frac{\mathrm{d}\,\Theta}{\mathrm{d}\,z}.$$

Po dosazení do rovnice dostáváme

$$\sin^2\vartheta(\sin^2\vartheta\Theta'' - \cos\vartheta\Theta') - \sin^2\vartheta\cos\vartheta\Theta' + +(K\sin^2\vartheta - m^2)\Theta = 0.$$

Zde značíme $'$ derivaci podle proměnné $z$. Po vydělení rovnice $\sin^2\vartheta$ a dosazení $z$ dostaneme

$$(1-z^2)\Theta'' - 2z\Theta' + \left(K - \frac{m^2}{1-z^2}\right)\Theta = 0. \tag{2}$$

Této rovnici se říká *přidružená Legendrova rovnice*. Napřed ji vyřešíme pro $m = 0$, kdy se rovnici říká *Legendrova rovnice*. Při řešení tohoto typu rovnic se často řešení předpokládá ve tvaru mocninné řady

$$\Theta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \Theta' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}, \quad \Theta'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n z^{n-2}.$$

Po dosazení do rovnice získáme

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2na_n + Ka_n\right]z^n = 0$$

a požadujeme eliminaci koeficientů u každé mocniny $z$. Z toho dostaneme

$$\begin{aligned} a_0 &= \Theta(0) \\ a_1 &= \Theta'(0) \\ &\vdots \\ a_{n+2} &= \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left[n(n-1) + 2n - K\right]a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left[n(n+1) - K\right]a_n. \end{aligned}$$

Výsledná mocninná řada konverguje pro $|z| < 1$. Aby byla zaručena konvergence pro $|z| = 1$, je nutno, aby se jednalo o polynom (nenulový musí být jen konečný počet sčítanců řady). To lze zaručit jedině tak, že jmenovatel $n(n+1) - K$ je roven nule pro nějaké $n$, tedy $K = \ell(\ell+1)$, $\ell \in \mathbb{N}$.

Bez újmy na obecnosti mohu předpokládat, že $a_0 = a_1 = 1$; všimněme si, že $a_0$ určuje sudé koeficienty a $a_1$ zase liché. Chceme-li jinou hodnotu $\Theta(0)$ než jedna, vynásobíme sudý polynom touto hodnotou, chceme-li jinou hodnotu $\Theta'(0)$ než jedna, vynásobíme lichý polynom touto hodnotou. Libovolné řešení lze tedy zapsat jako lineární kombinaci takovýchto polynomů pro různá $\ell$. Těmto polynomům se říká *Legendrovy polynomy stupně* $\ell$ a značí se obvykle $\mathrm{P}_\ell(z)$.

Rekurentní vzorec pro $a_n$ lze vyřešit, častěji se však používá tzv. *Rodriguesova vzorce*

$$\mathrm{P}_\ell(z) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}\,z^\ell}(z^2-1)^\ell$$

(zkuste si dosadit do Legendrovy rovnice a ověřit, že se jedná o řešení; z jednoznačnosti řešení vyplývá rovnost polynomů). Snadno se můžeme rovněž přesvědčit, že Legendrovy polynomy jsou ortogonální vzhledem ke skalárnímu součinu

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_k(z)\mathrm{P}_\ell(z) = \begin{cases} 0 & \text{pro } k \neq \ell \\ \frac{2}{2\ell+1} & \text{pro } k = \ell. \end{cases}$$

Pro výpočet bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $\ell > k$. Potom metodou per partes dostaneme

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_\ell\mathrm{P}_k\,\mathrm{d}\,z = \frac{1}{2^{k+l}l!k!}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}\,z^\ell}(z^2-1)^\ell\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\,z^k}(z^2-1)^k\,\mathrm{d}\,z = \frac{(-1)^\ell}{2^{k+l}l!k!}\int_{-1}^{1}(z^2-1)^\ell\underbrace{\frac{\mathrm{d}^{k+\ell}}{\mathrm{d}\,z^{k+\ell}}(z^2-1)^k}_{0\text{ pro }\ell>k}\,\mathrm{d}\,z = 0$$

Pro $k = \ell$ dostaneme po provedení derivací (všimněte si, že $2\ell$-krát derivujeme polynom stupně $2\ell$)

$$\frac{(2\ell)!}{2^{2\ell}(l!)^2} \int_{-1}^{1} (1-z^2)^\ell \, \mathrm{d}\, z.$$

Dále provedeme substituci $u = \frac{1-z}{2}$ a získáme

$$\frac{2(2\ell)!}{(l!)^2} \int_0^1 u^\ell (1-u)^\ell \, \mathrm{d}\, u,$$

integrál dává Eulerovu Beta funkci $\mathrm{B}(\ell+1, \ell+1)$, obecně

$$\mathrm{B}(k+1, \ell+1) = \int_0^1 u^k (1-u)^\ell \, \mathrm{d}\, u = \frac{k!\ell!}{(k+\ell+1)!}.$$

Celkem dostaneme

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_\ell^2(z) \, \mathrm{d}\, z = \frac{2}{2\ell+1}.$$

Nyní vyřešíme přidruženou Legendrovu rovnici ($m \neq 0$). Jejími konečnými řešeními jsou *přidružené Legendrovy polynomy* (je to zavádějící název, protože pokud je $m$ liché, zřejmě se nejedná o polynomy)

$$\mathrm{P}_\ell^m(z) = (1-z^2)^{m/2} \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\, z^m} \mathrm{P}_\ell(z).$$

O tom, že se jedná o řešení se přesvědčíme dosazením. Napřed budeme $m$-krát derivovat Legendrovu rovnici (se závislou proměnnou označenou $p$)

$$\begin{aligned}
(1-z^2)p^{(2)} - 2zp^{(1)} + Kp^{(0)} &= 0 && \text{0. derivace} \\
(1-z^2)p^{(3)} - 4zp^{(2)} + (K-2)p^{(1)} &= 0 && \text{1. derivace} \\
(1-z^2)p^{(4)} - 6zp^{(3)} + (K-6)p^{(2)} &= 0 && \text{2. derivace} \\
(1-z^2)p^{(5)} - 8zp^{(4)} + (K-12)p^{(3)} &= 0 && \text{3. derivace} \\
&\vdots \\
(1-z^2)p^{(m+2)} - 2(m+1)zp^{(m+1)} + [K - m(m+1)]p^{(m)} &= 0 && m\text{. derivace.}
\end{aligned}$$

Do vzniklé rovnice nyní dosadíme $p = r(1-z^2)^{-m/2}$. Poté provedeme všechny potřebné derivace, vzniklou rovnici vynásobíme $(1-z^2)^{m/2}$ a nakonec skutečně dostaneme přidruženou Legendrovu rovnici.

Podotkneme ještě, že vhodně normovaným funkcím

$$\mathrm{Y}_{\ell m}(\vartheta, \varphi) = K\mathrm{P}_\ell^m(\cos\vartheta)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, m\varphi}$$

říkáme *kulové funkce*. Normování se většinou volí tak, aby integrál přes sféru dal jedničku, tedy

$$\int_\pi^0 \mathrm{d}(\cos\vartheta) \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\,\varphi \mathrm{Y}_{\ell m}\mathrm{Y}_{kn}^* = \delta\ell k\delta mn.$$

Integrál přes $\varphi$ je triviální a dostáváme

$$2|K|^2\pi\delta_{mn} \int_{-1}^{1} \mathrm{P}_\ell^m(z)\mathrm{P}_k^m(z) \, \mathrm{d}\, z.$$

Zbývající integrál řešme podobně jako jsme to dělali pro $m = 0$. Napřed si ale všimneme, že vzorec pro výpočet přidružených Legendrových polynomů lze napsat také jako

$$\mathrm{P}_\ell^m(z) = (-1)^m \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!2^\ell\ell!} \frac{\mathrm{d}^{\ell-m}}{\mathrm{d}\, z^{\ell-m}} (z^2-1)^\ell.$$

To plyne z toho, že řešení pro $m$ je zároveň řešením pro $-m$. Konstantu lze určit uvážením počtu derivací. V integrálu nyní můžeme zapsat jeden součinitel podle původního a jeden podle alternativního vzorce a stačí užít $(\ell - m)$krát metodu per partes. Celkem dostaneme

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_\ell^m(z)\mathrm{P}_k^m(z)\,\mathrm{d}\,z = \frac{2}{2\ell+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}.$$

Pokud tedy chceme normovat kulové funkce, jak je uvedeno výše, je možné zvolit konstantu $K$ reálnou takto

$$K = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}}.$$

Poslední rovnice, kterou zbývá vyřešit, je rovnice pro $R(r)$, kterou nyní můžeme zapsat ve tvaru

$$(r^2 R')' - \ell(\ell+1)r^2 R = 0. \tag{3}$$

Řešení budeme předpokládat ve tvaru obecné mocniny $r^k$ a dostaneme triviálně $k(k+1) = \ell(\ell+1)$, což má řešení $k = \ell$ a $k = -\ell - 1$. Obecné řešení této rovnice je tedy

$$R(r) = Ar^\ell + \frac{B}{r^{\ell+1}}.$$