I. Diferenciální rovnice

Základní pojmy. **1.** Nakreslete systém křivek v rovině xy splňujících rovnici

$$x^2 + (y+a)^2 = a^2,$$

kde a je parametr. Najděte rovnici, kterou splňují x, y a $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ a která nezávisí na parametru a. **[# 1]**

2. (Padající dešťová kapka) Určete směrové pole a izokliny diferenciální rovnice

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = -g - \frac{k}{m}v(t)|v(t)|, \tag{1}$$

kde g je gravitační zrychlení, $k > 0$ je koeficient určující odpor vzduchu, m je hmotnost kapky, $v(t)$ je rychlost a t čas. Dále určete

$$\lim_{t\to\infty} v(t).$$ **[# 1]**

3. (Logistická rovnice) Určete směrové pole a izokliny diferenciální rovnice

$$\frac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t} = a p(t) - b p^2(t), \tag{2}$$

kde $a, b > 0$. Určete rovněž

$$\lim_{t\to\infty} p(t).$$ **[# 1]**

4. Určete směrové pole a izokliny diferenciální rovnice

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = y^2 - x^2.$$ **[# 1]**

Separované proměnné. **5.** Řešte rovnici (2) s počáteční podmínkou $p(0) = p_0 > 0$. **[# 1]**

6. Řešte rovnici (1) s počáteční podmínkou $v(0) = v_0 < 0$. **[# 1]**

7. Řešte rovnici

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} + y(x) = \mathrm{e}^{ax},$$

pro $a \neq -1$. Potom určete limitu pro $a \to -1$ a ukažte, že dostanete řešení pro $a = -1$. **[# 2]**

8. Řešte obecně rovnici

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\operatorname{cotg} x + y = 1.$$ **[# 2]**

9. Řešte rovnici

$$\frac{\mathrm{d}\,y(x)}{\mathrm{d}\,x} = x^2(1+y)$$

s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$, kde $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. **[# 2]**

10. Řešte obecně rovnici

$$\frac{\mathrm{d}\,y(x)}{\mathrm{d}\,x} = \left(\frac{y-1}{x+y}\right)^2.$$ **[# 2]**

11. Řešte obecně rovnici

$$\frac{\mathrm{d}\,y(x)}{\mathrm{d}\,x} = \sin(x+y+1).$$ **[# 2]**

Lineární diferenciální rovnice. Nadále značím $'$ derivaci podle nezávislé proměnné (většinou x).

12. Ukažte, že obecné řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice prvního řádu je dáno součtem obecného řešení rovnice homogenní a libovolného řešení nehomogenní rovnice (tomuto řešení se říká partikulární). **[# 1]**

13. Řešte rovnice

$$y' \cos x + y \sin x + x = 0,$$ **[# 2]**

$$y' + 2xy = x^3 - x,$$ **[# 2]**

$$y' + \frac{2y}{x} = \sin x.$$ **[# 2]**

Ostatní typy. Zde jsou příklady na exaktní diferenciální rovnice a rovnici Bernoulliho. V rovnicích nerozřešených vzhledem k derivaci označíme $y' = p$.

14. Řešte rovnici

$$y' = x^2 y - \frac{x^2}{y^2}.$$ **[# 2]**

15. Řešte rovnice

$$2y = \frac{x}{p^2} - p,$$ **[# 2]**

$$2px + y = \ln p,$$ **[# 2]**

$$y = px + \alpha p^2,\ \alpha \in \mathbb{R},$$ **[# 2]**

$$p^4 = 3p^2 + 4.$$ **[# 2]**

16. Určete rovnice siločar v poli elektrického dipólu. **[# 3]**

Rovnice vyššího řádu s konstantními koeficienty. **17.** Řešte rovnici pro vynucené tlumené kmitání

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+kx=F_0\sin\omega t. \qquad \text{[\# 2]}$$

18. Řešte rovnici

$$y''-2y'+y=\frac{\mathrm{e}^x}{x^2-1}. \qquad \text{[\# 2]}$$

19. Řešte počáteční problém

$$y''+y=(1-x^2)\sin x, \quad y(0)=0, y'(0)=1. \qquad \text{[\# 2]}$$

20. Řešte rovnice vyššího řádu

$$y'''-y''+y'-y=\mathrm{e}^x\sin x, \qquad \text{[\# 2]}$$
$$y^{(8)}+y=x^8. \qquad \text{[\# 2]}$$

21. Řešte počáteční problém vyššího řádu

$$\begin{gathered} y''''+y=\sin x,\\ y^{(0)}(0)=\cdots=y^{(2)}(0)=0, y^{(3)}(0)=-1, \end{gathered} \qquad \text{[\# 2]}$$
$$y''''-y'=\cos x, \quad y^{(0)}(0)=\cdots=y^{(3)}(0)=1. \qquad \text{[\# 2]}$$

Metrické prostory

22. Definujme funkci $d:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ následovně: Stereografickou projekcí se dvojici bodů x,y na reálné ose přiřadí dvojice bodů na jednotkové kružnici, úhel mezi obrazy budiž $d(x,y)$. Dokažte, že d je metrika na $\mathbb{R}$ a najděte zúplnění $(\mathbb{R},d)$. [# 2]

23. V předchozím jsme si definovali metriky d_1,d_2,d_∞ na $\mathbb{R}^n$. Stejné metriky lze uvažovat i na prostorech posloupností takových, že d_1, resp. d_2 resp. d_∞ nabývají konečných hodnot. Definujme posloupnosti

(a) $x_n=(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{n\text{-krát}},0,\ldots)$,

(b) $x_n=(1,2,\ldots,n,0,\ldots)$,

(c) $x_n = (\underbrace{\tfrac{1}{n}, \ldots, \tfrac{1}{n}}_{n\text{-krát}}, 0, \ldots)$,

(d) $x_n = (\underbrace{\tfrac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \tfrac{1}{\sqrt{n}}}_{n\text{-krát}}, 0, \ldots)$,

Ukažte, které posloupnosti jsou konvergentní vzhledem ke které z výše uvedených metrik. **[# 2]**

24. V prostorech z předchozího příkladu určete uzávěry množin tzv. finitních posloupností, tj. posloupností s konečným počtem nenulových členů. **[# 2]**

25. (Keplerův problém). Ve vhodných jednotkách jsou vzdálenost planety r od Slunce a čas t, kdy se planeta v dané vzdálenosti nachází, dány jako

$$r = 1 - e\cos\xi,$$
$$t = \xi - e\sin\xi,$$

kde e je excentricita. Často potřebujeme znát vzdálenost od Slunce r v závislosti na čase t, tj. potřebujeme pro pevné t a e řešit rovnici

$$\xi - e\sin\xi = t.$$

Aplikací Banachovy věty o pevném bodě kontrakce toto řešení nalezněte. **[# 3]**

26. Uvažme euklidovský prostor dimenze n (s metrikou d_2) a lineární operátor A na tomto prostoru. Zjistěte nutné a postačující podmínky, aby A byla kontrakce. **[# 3]**

Aplikací Banachovy věty o pevném bodě kontrakce řešte rovnice

27. $y' - y = 0$, $y(0) = 1$. **[# 1]**

28. $y(x) = y(x) - \int_0^1 \mathrm{e}^{-tx}\, y(t)\,\mathrm{d}t$, $y(0) = 1$. **[# 2]**

Diferenciální počet funkcí více proměnných

Základní pojmy. **29.** Nalezněte $f(y,x)$, $f(-x,-y)$, $f(\frac{1}{x},\frac{1}{y})$, $\frac{1}{f(x,y)}$ jestliže $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{2xy}$. **[# 1]**

30. Nalezněte hodnoty funkce

$$f(x,y) = \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{1 - x^2 - y^2}$$

v bodech nacházejících se na kružnici $x^2 + y^2 = r^2$. [# 1]

Zobrazte v kartézské rovině definiční obory funkcí určených svým grafem:

31. $z = \sqrt{1 - 9x^2 - y^2}$, [# 1]

32. $z = \ln(x - y)$, [# 1]

33. $z = \arccos \dfrac{y}{x+y}$, [# 1]

34. $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$. [# 1]

Načrtněte vrstevnice funkcí určených svým grafem:

35. $z = x^2 - y^2$, [# 1]

36. $z = x^y$, $x > 0$, [# 1]

37. $z = \sqrt[3]{xy}$. [# 1]

Načrtněte v kartézském prostoru grafy funkcí:

38. $z = 1 - x - y$, [# 1]

39. $z = x^2 + y^2$, [# 1]

40. $z = x^2$, [# 1]

41. $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$, [# 1]

42. $z = \sqrt{1 + x^2 - y^2}$, [# 1]

43. $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, [# 1]

44. $z = x^2 - y^2$, [# 1]

45. $z = 1 + \sqrt{1 - 4x^2 - (y+1)^2}$. [# 1]

46. Nalezněte $f(x, y)$, je-li $f(x + y, x - y) = xy + y^2$. [# 1]

Limity a spojitost. Nalezněte následující limity:

47. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy}$, [# 2]

48. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x+y}$, [# 2]

49. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. [# 2]

50. Je následující funkce spojitá?

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2-y^2}, & x^2+y^2 \le 1 \\ 0. & x^2+y^2 > 1 \end{cases}$$ **[# 1]**

Parciální derivace, úplný diferenciál, gradient. Spočtěte parciální derivace funkcí určených grafem:

51. $z = x^3 + y^3 - 3axy$, $a \in \mathbb{R}$, **[# 1]**

52. $z = \frac{x-y}{x+y}$, **[# 1]**

53. $z = \sqrt{x^2 - y^2}$, **[# 1]**

54. $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$, **[# 1]**

55. $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, **[# 1]**

56. $w = (xy)^z$, **[# 1]**

57. $w = z^{xy}$. **[# 1]**

58. Ukažte, že pro $w = (x-y)(y-z)(z-x)$ platí

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$ **[# 2]**

Nalezněte úplné diferenciály funkcí:

59. $z = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, **[# 1]**

60. $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$. **[# 1]**

61. Periodu kmitů T matematického kyvadla spočteme podle vzorce

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}},$$

kde ℓ je délka kyvadla a g je gravitační zrychlení. Najděte chybu při výpočtu T způsobenou malými chybami $\Delta\ell$ při měření ℓ a Δg při měření g. **[# 2]**

62. Spočtěte $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$, je-li $w = xyz$ a $x = t^2 + 1$, $y = \ln t$, $z = \operatorname{tg} t$. **[# 1]**

63. Spočtěte $\frac{\partial z}{\partial x}$ a $\frac{\partial z}{\partial y}$, jsou-li $z = f(u,v)$ a $u = x^2 - y^2$ a $v = \mathrm{e}^{2xy}$. **[# 2]**

64. Ukažte, že pokud $w = f(x^2+y^2+z^2)$ kde

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\varphi\sin\theta\\
y &= r\sin\varphi\sin\theta\\
z &= r\cos\theta,
\end{aligned}
$$

potom $\frac{\partial w}{\partial\varphi} = 0$ a $\frac{\partial w}{\partial\theta} = 0$. **[# 2]**

65. Nalezněte derivaci funkce $z = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ v bodě $[1,1]$ ve směru vektoru $(1,1)$. **[# 1]**

66. Nalezněte derivaci funkce $z = xy + yz + zx$ v bodě $[2,1,3]$ ve směru mířícím z tohoto bodu do bodu $[5,5,10]$. **[# 1]**

Nalezněte stacionární body funkcí:

67. $z = x^2 + xy + y^2 - 4x - 2y$, **[# 1]**

68. $z = x^3 + y^3 - 3xy$. **[# 1]**

69. Nalezněte úhel svíraný gradienty funkce $z = \ln\frac{y}{x}$ v bodech $[\frac{1}{2},\frac{1}{4}]$ a $[1,1]$. **[# []**1]

70. Spočtěte gradientní vektorové pole pro následující funkce:

71. $z = x + y$, **[# 1]**

72. $z = xy$, **[# 1]**

73. $z = x^2 + y^2$, **[# 1]**

74. $w = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. **[# 2]**

Parciální derivace vyšších řádů, Hessián. **75.** Nalezněte $\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y\partial z}$, je-li $w = x^a y^b z^c$, $a,b,c\in\mathbb{R}$. **[# 1]**

76. Ukažte, že funkce $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ vyhovuje Laplaceově rovnici

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$ **[# 1]**

77. Ukažte, že funkce

$$w(x,y,z,t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}{4a^2 t}}$$

vyhovuje rovnici pro vedení tepla

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right).$$ **[# 2]**

78. Nalezněte $z = z(x, y)$, platí-li $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$. **[# 2]**

Nalezněte Hessián pro následující funkce

79. $z = x^2 + y^2$, **[# 1]**

80. $w = xyz$. **[# 1]**

Ověřte, že se jedná o totální diferenciály funkce, pokud ano tyto najděte:

81. $y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$, **[# 1]**

82. $\frac{x+2y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x - \frac{2x-y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$. **[# 1]**

83. Určete konstanty a, b tak, aby výraz

$$\frac{(ax^2 + 2xy + y^2)\,\mathrm{d}x - (x^2 + 2xy + by^2)\,\mathrm{d}y}{(x^2 + y^2)^2}$$

byl totálním diferenciálem. **[# 2]**

84. Je dáno vektorové pole síly

$$F = \frac{ye_x + \lambda xe_y}{(x+y)^2}.$$

Určete koeficient λ tak, aby síla byla potenciálová.

85. Jakou podmínku musí splňovat funkce $f(x, y)$ ve výrazu

$$f(x, y)(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y),$$

aby tento byl totálním diferenciálem.

Diferenciace implicitních funkcí. **86.** Buď $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Najděte $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$, $\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3}$. **[# 2]**

87. Buď $x^2 + y^2 + 2axy = 0$, $a > 1$. Ukažte, že $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = 0$ a tento výsledek vysvětlete. **[# 2]**

88. Funkce z je definována pomocí

$$x^2 + y^2 - z^2 - xy = 0.$$

Najděte $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ pro bod určený hodnotami $x=-1$, $y=0$, $z=1$. **[# 1]**

89. Nalezněte $\mathrm{d}z$ a $\mathrm{d}^2 z$ pokud

$$x^2+y^2+z^2=a^2.$$ **[# 2]**

Transformace proměnných. **90.** Diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x+y}{x-y}$$

transformujte do polárních souřadnic $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$. **[# 1]**

91. V polárních souřadnicích vyjádřete vzorec pro křivost K grafu funkce $y=y(x)$

$$K=\frac{\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}}{\left[1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$ **[# 2]**

92. Transformujte Laplaceovu rovnici do polárních souřadnic. **[# 1]**

Tečná rovina a normála k ploše. **93.** Ukažte, že rovnice plochy tečné k ploše určené implicitně

$$ax^2+by^2+cz^2=k$$

v bodě $[\alpha,\beta,\gamma]$ je

$$a\alpha x+b\beta y+c\gamma z=k.$$ **[# 1]**

94. Dokažte, že tečné roviny k ploše $xyz=m^3$ ohraničují spolu se souřadnicovými rovinami čtyřstěn o konstantním objemu. **[# 2]**

95. Dokažte, že souřadnicové plochy určené kulovými souřadnicemi r, θ a φ jsou na sebe navzájem kolmé. **[# 2]**

96. Spočtěte normálu k rotační ploše $z=f(x^2+y^2)$, $f'\neq 0$. Ukažte, že vždy protíná osu rotace. **[# 2]**

Taylorova řada. Rozveďte funkce do Taylorovy řady v daném bodě.

97. $\mathrm{e}^x\cos y$ v bodě $(0,0)$ do řádu 3. **[# 1]**

98. e^{x+y} v bodě $(1,-1)$ do řádu 3, potom obecně. **[# 2]**

99. Odvoďte přibližný výraz platný do druhého řádu pro

$$\operatorname{arctg}\frac{1+\alpha}{1-\beta}.$$ [# 2]

Extrémy funkce více proměnných. Najděte maxima a minima následujících funkcí.

100. $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$. [# 1]

101. $w = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. [# 2]

Najděte podmíněné extrémy funkcí.

102. $z = xy$ pro $x + y = 1$. [# 1]

103. $w = x^2 + y^2 + z^2$ pro $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. [# 2]

104. $w = xyz$ pro $x + y + z = 5$ a $xy + zx + yz = 8$. [# 3]

105. Dokažte nerovnost

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$$

pro $x, y, z > 0$. Hledejte maximum funkce $w = xyz$ s podmínkou $x + y + z = s$. [# 3]

106. Mezi všemi kvádry objemu V najděte ten s nejmenším povrchem. [# 2]

107. Mezi všemi trojůhelníky o obvodu $2p$ najděte ten s největší plochou. [# 2]

108. Do elipsoidu vepište kvádr co možná největšího objemu. [# 3]

109. Do sféry vepište válec o co možná největším objemu. [# 2]

110. Odvoďte zákon odrazu světelného paprsku v homogenním prostředí pomocí Fermatova principu. [# 3]

111. Prochází-li odporem R elektrický proud I, teplo uvolněné za jednotku času je $\frac{1}{2}RI^2$. Rozdělte proud I do tří větví I_1, I_2, I_3 o odporech R_1, R_2, R_3 tak, aby uvolněné teplo bylo co možná nejmenší. [# 4]