Cvičení k M3100

cvičící: Michael Krbek

18. září 2008

Posloupnosti

1. Spočtěte limity posloupností

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-2n+1}{n^3+1}, \quad [0] \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2n^5-4n+2}{n^5+4n-2}, \quad [2]$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right), \quad [0] \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}, \quad [1]$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}, \quad [\tfrac{3}{4}] \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!}, \quad [0]$$

2. Spočtěte limity posloupností

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n}, \quad [\infty] \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n\ln n}{n^2+1}, \quad [0]$$

$$\lim_{n\to\infty} (n+1)^{\frac{1}{\ln(n+1)}}, \quad [e] \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad [2]$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{n}{n^2+1}\right)^n, \quad [e] \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n+\sin n}{n-\sin n}, \quad [1]$$

3. Uveďte příklady konvergujících, divergujících a oscilujících posloupností.

4. Vyšetřete chování posloupnosti $(-1)^n \dfrac{n}{n+1}$, určete její infimum a supremum.

5. Vyšetřete chování posloupností

$$\lim_{n\to\infty} a_n, a_1 = 1, a_{n+1} = (1+a_n)^{-1}, \quad \lim_{n\to\infty} a_n, a_1 = \sqrt{2}, a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}.$$

Aproximace faktoriálu

1. Využijme vztahu

$$\ln n! = \ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n.$$

Podle lichoběžníkového pravidla je

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x \approx \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)}{2} + f(a+\tfrac{b-a}{n}) + \cdots + f(b-\tfrac{b-a}{n}) + \frac{f(b)}{2}\right],$$

z toho pro náš případ plyne, že

$$\ln n! \approx \int_1^n \ln t\,\mathrm{d}\,t + \tfrac{1}{2}\ln n,$$

tj.

$$n! \approx n^{n+\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-n}\,.$$

2. Metoda sedlového bodu. Postupujeme obecně, pro integrály typu

$$I(n) = \int_a^b \mathrm{e}^{nf(t)}\,\mathrm{d}\,t,$$

kde $f(t)$ je vhodná funkce. Pro velká n, bude největší příspěvek k integrálu v okolí maxima funkce $f(t)$, které označíme třeba u. Rozvineme f do Taylorovy řady v bodě maxima u

$$f(t) = f(u) - \tfrac{1}{2}|f''(u)|(t-u)^2 + \mathcal{O}(|t-u|^3),$$

dosadíme aproximaci zpět do integrálu. Nyní prodloužíme meze integrace na celou reálnou osu a výsledný integrál spočteme (plocha pod Gaussovou křivkou).

$$I(n) \approx \mathrm{e}^{nf(u)}\sqrt{\frac{2\pi}{n|f''(u)|}}\quad,$$

což v případě faktoriálu

$$n! = \int_0^\infty t^n\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t$$

dává

$$n! \approx n^n\,\mathrm{e}^{-n}\,\sqrt{2\pi n}.$$

Řady s konstantními členy

6. Zopakujte si součty konečných aritmetických a geometrických řad.

7. Určete metodu na zjištění konečných součtů řad typu

$$\sum_{n=1}^{N} n^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

8. Zopakujte si známá kritéria konvergence: první a druhé srovnávací, odmocninové, podílové, jejich verze limitní, integrální Raabeho, Leibnizovo

9. Vyšetřete konvergenci řad, vždy $k \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{ccc}
\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+1}{2n^2-1} & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2-n-1}{n^3+n+1} & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+1}{n^4+2n^2+2n+1} \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!} & \sum_{n=1}^{\infty} \sin n \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n^x} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{x^{2n}+1} & \sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2 \\
\sum_{n=1}^{\infty} n^{\ln x} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n^3}{2^n+3^n} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^4} \\
\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n} & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n \sin n}{n^2+1} & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+\sqrt{n}}
\end{array}$$

10. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$. Ukažte, že v tom případě řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně.

11. Vyšetřete konvergenci řad, vždy $k \in \mathbb{N}$ a $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{cc}
\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1}) & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n^2+x} - \sqrt[3]{n^2+y}\right) \sqrt[4]{n} \\
\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n^4\pi)(\sqrt{k+x} - \sqrt{k+y}) & \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\pi \frac{2-\cos n\pi}{n} \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1000}}{(-2)^n} & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+n}-n}{\sqrt{n^4+n^3}-\sqrt{n^4+n}}
\end{array}$$

12. Vyšetřete konvergenci řad

$$\begin{array}{cc}
\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^x n} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{arctg} n}{n^2} & \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi}{6} \left(\frac{n^3}{n^2+1} - n\right) \sqrt[k]{x^2-4x+4} \\
\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{1}{n} & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{\operatorname{arctg} n}\right)^n.
\end{array}$$

Řady funkcí

13. Rozhodněte o stejnoměrné konvergenci posloupností

$$f_n(x) = x^n - x^{2n},\ x \in [0,1] \quad f_n(x) = \mathrm{e}^{-nx},\ x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) = \frac{x}{n},\ x \in \mathbb{R}.$$

14. Určete limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{x^2/n}$.

15. Rozhodněte o konvergenci a stejnoměrné konvergenci řad funkcí.

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n}\right).$$

Testy

1. Určete limity posloupností

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots n^2}{n^3}, \quad \lim_{n\to\infty} a_n,\ a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{a_n}{2 + a_n^2}.$$

2. Zjistěte (absolutní i relativní) konvergenci řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n}$$

3. Zjistěte, na jakém intervalu řada $\sum_{n=2}^{\infty} \sin^2 \frac{x^2}{n^2 \ln n}$ konverguje stejnoměrně a pro které hodnoty x konverguje bodově.

1. Určete limity posloupností

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n+1}) \frac{n}{1+\sqrt[3]{n}}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor}{n^2},\ x \in \mathbb{R}.$$

2. Zjistěte (absolutní i relativní) konvergenci řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{\frac{n^4}{1+n^4}}.$$

3. Zjistěte, na jakém intervalu řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{n^2}$ konverguje stejnoměrně a pro které hodnoty x konverguje bodově.