Polarizace vakua - dokončení

Tomáš Řiháček

Na cvičení jsme dospěli k tomu, že regularizovaný polarizační tenzor musí mít tvar

$$\bar{\Pi}\big(q^2\big) = \frac{-2e^2}{\pi} \int\limits_0^1 \mathrm{d}\beta_1 \int\limits_0^1 \mathrm{d}\beta_2\, \beta_1\beta_2\, \delta(1-\beta_1-\beta_2) \int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} \sum_{i=0}^{N} C_i \exp\big[i\rho(-M_i^2+\beta_1\beta_2 q^2)\big], \tag{1}$$

kde poslední integrál označíme I a spočteme ho. Jelikož I diverguje logaritmicky, je třeba vhodně zvolit konstanty C_i a M_i. Zavedeme substituci

$$-B_i = -M_i^2 + \beta_1\beta_2 q^2,$$

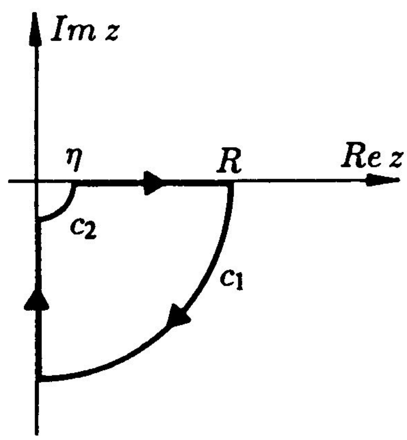
potom

$$I = \int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} \sum_{i=0}^{N} C_i \mathrm{e}^{-i\rho B_i} = \sum_{i=0}^{N} C_i \int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}\, \mathrm{e}^{i\rho B_i} = \sum_{i=0}^{N} C_i I_i. \tag{2}$$

Integrál I_i rozšíříme do komplexní roviny, počítáme tedy

$$J_i = \int\limits_{\mathcal{C}} \frac{\mathrm{d}z}{z}\, \mathrm{e}^{-izB_i},$$

kde křivka $\mathcal{C}$ je znázorněna na obrázku



Obrázek 1: Integrační křivka $\mathcal{C}$.

Zřejmě $J_i = 0$. Odhadem pomocí majorizace absolutní hodnotou se snadno přesvědčíme, že integrál přes $\mathcal{C}_1$ je nulový. Dále pak integrand v integrálu přes $\mathcal{C}_2$ rozvineme do Laurentovy řady, přičemž $z = \eta \mathrm{e}^{i\varphi}$ a po limitním přechodu zůstane první člen jako jediný nenulový

$$\lim_{\eta\to 0} \int\limits_{\mathcal{C}} \frac{\mathrm{d}z}{z} \mathrm{e}^{-izB_i} = \lim_{\eta\to 0} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \Big[i + \eta\,(\dots)\Big]\, \mathrm{d}\varphi = i\frac{\pi}{2}. \tag{3}$$

Potom tedy

$$
\begin{aligned}
I_i &= -\lim_{\eta\to 0}\lim_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{-\eta}\frac{i\,\mathrm{d}r}{ir}\,\mathrm{e}^{rB_i} - i\frac{\pi}{2} = \lim_{\eta\to 0}\int\limits_{-\eta}^{\infty}\frac{\mathrm{d}r}{r}\,\mathrm{e}^{rB_i} - i\frac{\pi}{2} = \begin{vmatrix} t = -rB_i \\ \mathrm{d}t = -B_i\,\mathrm{d}r \end{vmatrix} = \lim_{\eta\to 0}\int\limits_{\eta B_i}^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t}\,\mathrm{e}^{-t} - i\frac{\pi}{2} \\
&= \lim_{\eta\to 0}\left\{\Big[\ln t\mathrm{e}^{-t}\Big]_{\eta B_i}^{\infty} + \int\limits_{\eta B_i}^{\infty}\mathrm{d}t\ln t\,\mathrm{e}^{-t}\right\} - i\frac{\pi}{2} = \lim_{\eta\to 0}\left[-\mathrm{e}^{-\eta B_i}\big(\ln\eta + \ln B_i\big) + \int\limits_{\eta B_i}^{\infty}\mathrm{d}t\ln t\,\mathrm{e}^{-t}\right] - i\frac{\pi}{2}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Z (2) a (4) máme

$$
I = -\lim_{\eta\to 0}\left(\sum_{i=0}^{N} C_i\ln\eta\right) - \sum_{i=0}^{N} C_i\ln\Big(M_i^2 - \beta_1\beta_2 q^2\Big) + \sum_{i=0}^{N} C_i\int\limits_{0}^{\infty}\mathrm{d}t\ln t\,\mathrm{e}^{-t} - \sum_{i=0}^{\infty} C_i\, i\frac{\pi}{2}, \tag{5}
$$

odkud volbou

$$
\sum_{i=0}^{N} C_i = 0 \tag{6}
$$

máme

$$
I = -\sum_{i=0}^{N} C_i\ln\Big(M_i^2 - \beta_1\beta_2 q^2\Big). \tag{7}
$$

Tento výraz dále upravíme

$$
\begin{aligned}
I &= -\left[\ln\big(m^2 - \beta_1\beta_2 q^2\big) + \sum_{i=1}^{N} C_i\ln\big(M_i^2 - \beta_1\beta_2 q^2\big)\right] \\
&= -\left[\ln m^2 + \ln\big(1 - \beta_1\beta_2\frac{q^2}{m^2}\big) + \sum_{i=1}^{N} C_i\ln\left(\frac{M_i^2}{m^2} - \beta_1\beta_2\frac{q^2}{m^2}\right) + \sum_{i=1}^{N} C_i\ln m^2\right] \\
&= -\left[\sum_{i=0}^{N} C_i\ln m^2 + \ln\left(1 - \beta_1\beta_2\frac{q^2}{m^2}\right) + \sum_{i=1}^{N} C_i\ln\frac{M_i^2}{m^2} + \sum_{i=1}^{N} C_i\ln\left(1 - \beta_1\beta_2\frac{q^2}{m^2}\right)\right] \\
&= -\left[\ln\left(1 - \beta_1\beta_2\frac{q^2}{m^2}\right) + \sum_{i=1}^{N} C_i\ln\frac{M_i^2}{m^2}\right],
\end{aligned}
\tag{8}
$$

kde jsme využili (6) a předpokladu $M_i^2 \gg q^2$. Označíme

$$
\sum_{i=1}^{N} C_i\ln\frac{M_i^2}{m^2} \equiv -\ln\frac{\Lambda^2}{m^2},
$$

pak

$$
I = -\left[\ln\left(1 - \beta_1\beta_2\frac{q^2}{m^2}\right) - \ln\frac{\Lambda^2}{m^2}\right],
$$

dostáváme tedy

$$
\bar{\Pi}(q^2) = \frac{2e^2}{\pi}\int\limits_0^1\mathrm{d}\beta_1\int\limits_0^1\mathrm{d}\beta_2\,\beta_1\beta_2\,\delta(1-\beta_1-\beta_2)\left[\ln\left(1 - \beta_1\beta_2\frac{q^2}{m^2}\right) - \ln\frac{\Lambda^2}{m^2}\right]. \tag{9}
$$

Položíme $\beta_1 = 1 - \beta_2$,

$$
\begin{aligned}
\bar{\Pi}(q^2) &= \frac{2e^2}{\pi}\int\limits_0^1 \mathrm{d}\beta\,\beta(1-\beta)\left[\ln\left(1-\beta(1-\beta)\frac{q^2}{m^2}\right)-\ln\frac{\Lambda^2}{m^2}\right] \\
&= \frac{2e^2}{\pi}\left\{-\int\limits_0^1 \mathrm{d}\beta\,(\beta-\beta^2)\ln\frac{\Lambda^2}{m^2}+\int\limits_0^1 \mathrm{d}\beta\,(\beta-\beta^2)\ln\left[1-(\beta-\beta^2)\frac{q^2}{m^2}\right]\right\} \\
&= \frac{2e^2}{\pi}\left\{-\frac{1}{6}\ln\frac{\Lambda^2}{m^2}+\int\limits_0^1 \mathrm{d}\beta\,(\beta-\beta^2)\ln\left[1-(\beta-\beta^2)\frac{q^2}{m^2}\right]\right\} \\
&= -\frac{e^2}{3\pi}\ln\frac{\Lambda^2}{m^2}+\Pi^R(q^2)
\end{aligned} \tag{10}
$$

Zbývá tedy spočítat integrál $\Pi^R(q^2)$, který lze řešit analyticky. Integrací per partes dostáváme

$$
\Pi^R(q^2) = -\frac{2e^2}{\pi}\int\limits_0^1 \mathrm{d}\beta\left(\frac{1}{2}\beta^2-\frac{1}{3}\beta^3\right)\frac{1}{1-\beta(1-\beta)\frac{q^2}{m^2}}\left[-\frac{q^2}{m^2}(1-2\beta)\right] \tag{11}
$$

Následně zavedeme substituci $v = 2\beta - 1$, pak

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\beta^2+\frac{1}{3}\beta^3 &= \frac{-v^3+3v+2}{24} \\
\beta(1-\beta) &= \frac{1}{4}(1-v^2).
\end{aligned}
$$

Dostáváme tedy tvar

$$
\begin{aligned}
\Pi^R(q^2) &= \frac{2e^2}{\pi}\int\limits_{-1}^1 \mathrm{d}v\,\frac{1}{2}\,\frac{-v^3+3v+2}{24}\,\frac{v}{1-\frac{q^2}{4m^2}(1-v^2)}\,\frac{q^2}{m^2} \\
&= \frac{e^2}{\pi}\int\limits_{-1}^1 \mathrm{d}v\left[\frac{\frac{1}{2}v^2\left(1-\frac{1}{3}v^2\right)}{v^2+\frac{4m^2}{q^2}-1}+\frac{\frac{1}{3}v}{v^2+\frac{4m^2}{q^2}-1}\right] \\
&= \frac{e^2}{\pi}\int\limits_0^1 \mathrm{d}v\,\frac{v^2\left(1-\frac{1}{3}v^2\right)}{v^2+\frac{4m^2}{q^2}-1}
\end{aligned} \tag{12}
$$

kde druhý člen v integrandu na druhém řádku je lichá funkce, jemu příslušný integrál bude tudíž nulový, první člen je funkce sudá. Ke spočtení posledního integrálu studujme chování integrálu

$$
\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-c} \tag{13}
$$

Nejprve předpokládejme $c > 0$, potom (13) snadno vyřešíme rozkladem na parciální zlomky

$$
\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-c} = \frac{1}{2\sqrt{c}}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-\sqrt{c}}-\frac{1}{2\sqrt{c}}\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{c}} = \frac{1}{2\sqrt{c}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{c}}{x+\sqrt{c}}\right|.
$$

Pro $c < 0$ přechází integrál (13) na tvar

$$
\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+c},
$$

který lze rovněž snadno spočítat substitucí $x = \sqrt{c}\tan t$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+c} = \frac{1}{\sqrt{c}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{c}}\right).$$

Celkem tedy

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-c} = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{c}}\ln\left|\dfrac{x-\sqrt{c}}{x+\sqrt{c}}\right| & c>0 \\ \\ \dfrac{1}{\sqrt{-c}}\arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{-c}}\right) & c<0 \end{cases}$$

přičemž $c \equiv 1 - \dfrac{4m^2}{q^2}$.
Nastane tedy právě jedna z následujících možností:

$$q^2 \in (-\infty, 0) \longrightarrow c \in (1, \infty) \tag{I}$$

$$q^2 \in (0, 4m^2] \longrightarrow c \in (-\infty, 0] \tag{II}$$

$$q^2 \in (4m^2, \infty) \longrightarrow c \in (0, 1) \tag{III}$$

V případě III leží singularity na reálné ose v integračním oboru, je tedy třeba této části věnovat zvýšenou pozornost. Již známým trikem ($m \to m - i\varepsilon$) posuneme póly integrandu do horní poloroviny. Ekvivalentní postup je pól v bodě $v_0 = \sqrt{c}$ obejít dolní polorovinou půlkružnicí o poloměru ε. Potom

$$I_0 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}v}{v^2-c-i\varepsilon} = \int_0^{v_0-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}v}{v^2-c} + \int_{v_0+\varepsilon}^1 \frac{\mathrm{d}v}{v^2-c} + \frac{1}{2}2\pi i \,\mathrm{Res}\, \frac{1}{v^2-c}\bigg|_{v_0}, \tag{14}$$

kde první dva integrály reprezentují hlavní hodnotu integrálu a zároveň jsme využili vztahu (Sochockého formule) pro hlavní hodnotu integrálu funkce $\frac{1}{x}$ definovanou jako distribuci

$$\frac{1}{x-i\varepsilon} = \mathrm{p}\frac{1}{x} + i\pi\delta(x).$$

Potom tedy dostáváme

$$I_0 = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{c}}\ln\dfrac{\sqrt{c}-1}{\sqrt{c}+1} & 1<c<\infty \\ \\ \dfrac{1}{\sqrt{-c}}\arctan\dfrac{1}{\sqrt{-c}} & -\infty<c\le 0 \\ \\ \dfrac{1}{2\sqrt{c}}\ln\dfrac{1-\sqrt{c}}{1+\sqrt{c}} + i\dfrac{\pi}{2\sqrt{c}} & 0<c<1 \end{cases} \tag{15}$$

Dále označme

$$I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}v\, v^n}{v^2-c-i\varepsilon}.$$

Snadno ověříme platnost rekurentní formule (opět v limitě $\varepsilon \to 0$)

$$I_n - cI_{n-2} = \int_0^1 \mathrm{d}v \, \frac{v^n - cv^{n-2}}{v^2 - m - i\varepsilon} = \int_0^1 \mathrm{d}v \, v^{n-2} = \frac{1}{1-n}. \tag{16}$$

Vzhledem k (12), (15) a (16) dostáváme

$$\Pi^R(q^2) = \frac{\alpha}{\pi}\left[-\frac{5}{9} - \frac{4}{3}\frac{m^2}{q^2} + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2m^2}{q^2}\right) f(q^2)\right], \tag{17}$$

kde

$$f(q^2) = \begin{cases} \left[\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}}\right] \ln \frac{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} + 1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} - 1} & q^2 < 0 \\ \left[2\sqrt{\frac{4m^2}{q^2} - 1}\right] \arctan \frac{1}{\sqrt{\frac{4m^2}{q^2} - 1}} & 0 < q^2 \leq 4m^2 \\ \left[\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}}\right] \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}}} - i\pi\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} & 4m^2 < q^2 \end{cases} \tag{18}$$

Nyní jsme dospěli ke konečnému výrazu polarizačního tenzoru tvaru (10).
Podívejme se ještě na limitní případ pro $m^2 \gg q^2$. Taylorův rozvoj

$$\ln(1-x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \cdots\right)$$

použileme v (10). Po integraci tím dostáváme

$$\Pi^R(q^2) = -\frac{e^2}{\pi}\frac{q^2}{m^2}\left(\frac{1}{15} + \frac{1}{140}\frac{q^2}{m^2} + \cdots\right). \tag{19}$$

Pro objasnění jeho fyzikálního významu studujme amlitudu Mœlerova rozptylu opravenou o tento člen

$$\begin{aligned} M_{fi}^{(2)} &= (-ie\bar{u}_1'\gamma^\mu u_1)\frac{-4\pi i}{q^2}\left[g_{\mu\nu} + \frac{i}{4\pi}\bar{\Pi}_{\mu\tau}(q)\frac{-4\pi i g^\tau{}_\nu}{q^2}\right](-ie\bar{u}_2'\gamma^\nu u_2) \\ &= (-ie\bar{u}_1'\gamma^\mu u_1) iD_F^{(0)}(q)\left[g_{\mu\nu} + (g_{\mu\tau}q^2 - q_\mu q_\tau)\bar{\Pi}(q^2)\frac{g^\tau{}_\nu}{q^2}\right](-ie\bar{u}_2'\gamma^\nu u_2) \\ &= (-ie\bar{u}_1'\gamma^\mu u_1) iD_F^{(0)}(q)\left[1 - \frac{e^2}{3\pi}\ln\frac{\Lambda^2}{m^2} + \Pi^R(q^2)\right](-ie\bar{u}_2'\gamma_\mu u_2), \end{aligned} \tag{20}$$

kde jsme při poslední úpravě využili kalibrační invariance přechodového proudu, tedy

$$q_\nu j_{fi}^\nu = 0,$$

takže člen $q_\mu q_\nu$ vypadne.
Jelikož (20) je přesné do řádu e^2, můžeme to též napsat jako

$$M_{fi}^{(2)} = (-ie\bar{u}_1'\gamma^\mu u_1)\left[Z_3\left(1 + \Pi^R(q^2)\right) iD_F^{(0)}(q)\right](-ie\bar{u}_2'\gamma_\mu u_2), \tag{21}$$

kde jsme označili

$$Z_3 = 1 - \frac{e^2}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}. \tag{22}$$

Výrazy (20) a (21) se liší členem řádu e^3, což je za hranicí požadované přesnosti. Oprava tedy zahrnuje konstantní faktor Z_3 a $\bar{\Pi}(q^2)$ jako funkci hybnosti. Pro rozptyl při malých hybnostech, což odpovídá rozptylu na valkou vzdálenost je potom amlituda druhého řádu dána

$$M_{fi}^{(2)} = Z_3 M_{fi}^{(1)},$$

a regularizovaný náboj je potom

$$e_R = \sqrt{Z_3} e,$$

o čemž již byla řeč na přednášce.