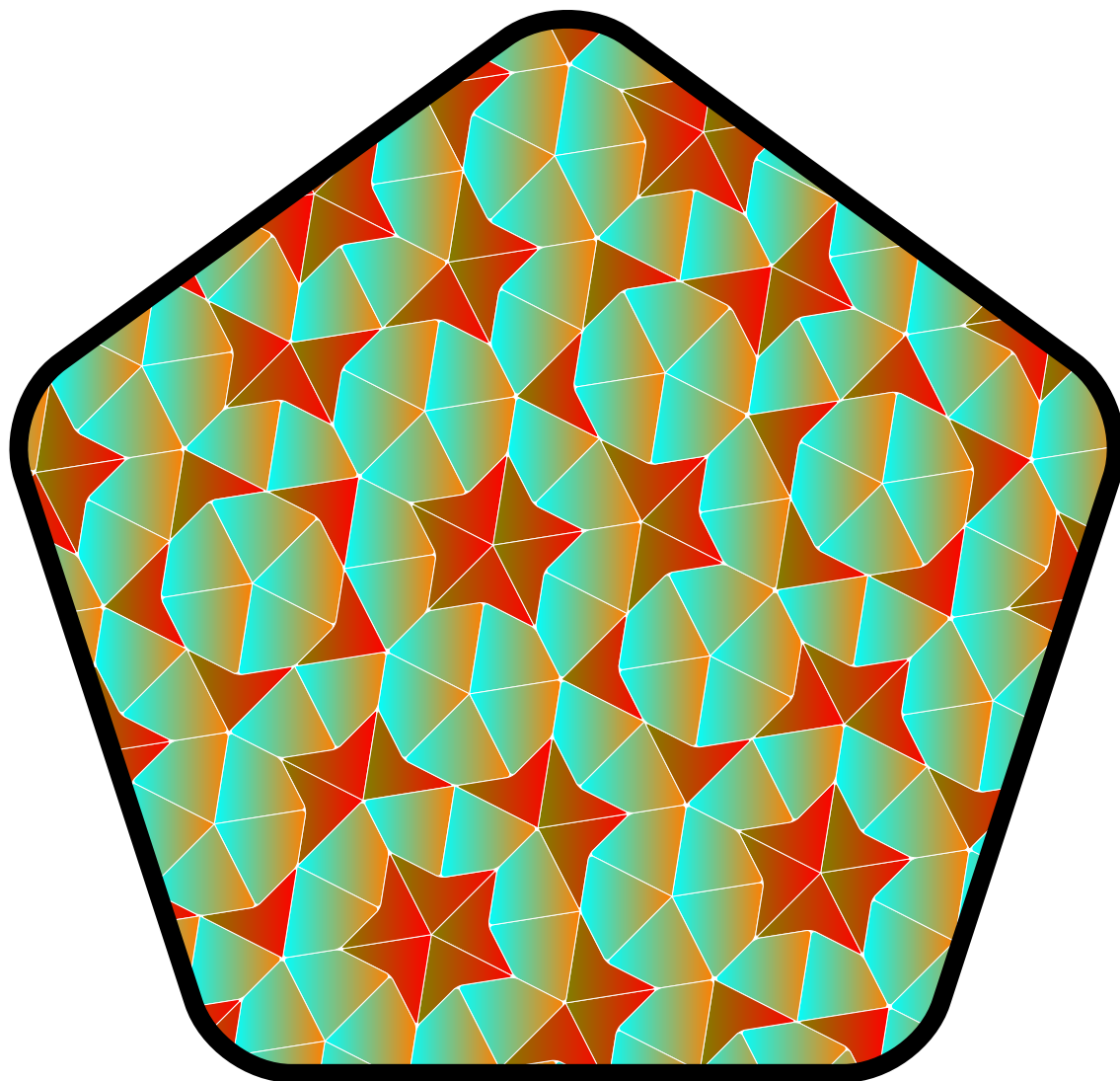


Speciální teorie relativity a elektrodynamika

Skriptum pro F4082

17. května 2024

Michael Krbek



Obrázek 1: Pětčetná symetrie Penroseova aperiodického dláždění roviny

Obsah

1	Rozměrová analýza	8
2	Speciální teorie relativity	10
2.1	Rotace a pohyby v rovině	10
2.2	Rotace a pohyby v prostoru	11
2.3	Galileiho transformace	13
2.4	Nerelativistická volná částice	13
2.5	Speciální relativita v jedné prostorové dimenzi	14
2.6	Lorentzovy transformace na přímce a v prostoru	15
2.7	Jednoduché důsledky Lorentzových transformací na přímce	17
2.8	Lorentzovy a Poincarého transformace	19
2.9	Vlastní čas	20
2.10	Volná částice ve speciální teorii relativity	21
2.11	Relativistická kinematika	23
2.12	Relativistický pohyb s konstantním zrychlením	24
2.13	Nerelativistická limita pro relativistický rovnoměrně zrychlený pohyb	27
2.14	Relativistická hybnost	27
2.15	Relativistický moment hybnosti	27
3	Relativistický pohyb částic v elektromagnetickém poli	28
3.1	Účinek pro pohyb částice v elektromagnetickém poli	28
3.2	Pohybové rovnice pro nabitou částici v elektromagnetickém poli	29
3.3	Pohyb nabitě částice v konstantním elektrickém poli	30
3.4	Pohyb nabitě částice v konstantním magnetickém poli	31
3.5	Lorentzova transformace elektromagnetického pole	32
3.6	Invarianty elektromagnetického pole	32

3.7	Nejednoznačnost určení potenciálů	33
3.8	Pohyb nabité částice v poli rovinné elektromagnetické vlny	33
4	Rovnice elektromagnetického pole	37
4.1	Účinek pro elektromagnetické pole	37
4.2	Interakce pole a pohybujících se nábojů	38
4.3	Rovnice elektromagnetického pole	39
4.4	Elektromagnetické vlny ve vakuu	40
4.5	Monochromatická rovinná elektromagnetická vlna ve vakuu	41
4.6	Tenzor energie – hybnosti	41
5	Elektrostatika a magnetostatika	42
5.1	Statické Maxwellovy rovnice	42
5.2	Základní úloha elektrostatiky	44
5.3	Některé metody řešení úloh elektrostatiky	45
5.4	Multipólový rozklad pole	55
5.5	Řešení úloh magnetostatiky	61
5.6	Multipólový rozvoj pro magnetický potenciál	62
5.7	Elektrostatické pole v dielektrících	66
5.8	Okrajové podmínky v elektrostatice a magnetostatice na rozhraní dvou jednoduchých prostředí	71
6	Nestacionární Maxwellovy rovnice	71
6.1	Kvazistacionární elektromagnetická pole a hustoty	71
6.2	Vlnovod a rezonátor	74
6.3	Retardované potenciály	79
6.4	Aproximace dalekého pole	80
6.5	m -půlvlnná lineární anténa	81
6.6	Dipólová anténa	82

7 Geometrická optika	83
7.1 Paraxiální aproximace	83
7.2 Gaussovské svazky	84
7.3 Rovnice pro eikonál	84
7.4 Ekvivalence eikonálové aproximace a Fermatova principu	86
8 Elektromagnetické obvody	89
8.1 Drudeho model, Hallův jev, komplexní odpor vodiče	89
8.2 Kapacita kondenzátoru	91
8.3 Vzájemná a vlastní indukčnost	92

Seznam tabulek

1 Základní rozměry a jednotky soustavy SI	8
2 Některé odvozené rozměry a jednotky v soustavě SI	9
3 Vyjádření sférických funkcí nízkých řádů pomocí kartézských souřadnic	58

Seznam obrázků

1 Pětčetná symetrie Penroseova aperiodického dláždění roviny	2
2 Triceratops v původní pozici (červeně), otočený napřed o $\pi/2$ v rovině yz , potom o $\pi/2$ v rovině zx (zeleně) resp. napřed o $\pi/2$ v rovině zx , potom o $\pi/2$ v rovině yz (modře).	12
3 Podle Galileiho transformace je velikost rychlosti světla v soustavě S' rovna c , ale v soustavě S je rovna $c-v$ resp. $c+v$. To je v rozporu s axiomem o konstantní velikosti rychlosti světla.	15
4 Zobrazení Lorentzovy transformace standardního obrazce pro hodnotu $v/c = 0,5$, což odpovídá $\psi \approx -0,5493$	16
5 Vyslání a přijetí světelného signálu ve dvou inerciálních vztažných soustavách S' a S . Z Pythagorovy věty dostaneme $(\frac{c\tau}{2})^2 = (\frac{v\tau}{2})^2 + (\frac{c\tau'}{2})^2$ a odtud $\tau' = \tau\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$	18

6	Časoprostorový diagram cesty dvojčete v kosmické lodi vzhledem k dvojčeti na Zemi. Všimneme si, že tečna ke grafu má nulovou směrnici pro $t = 0, 20$ a 40 let, což odpovídá nulové rychlosti. Nejstrmější směrnice je pro $t = 10$ a 30 let, což odpovídá největší velikosti rychlosti.	26
7	Částice v poli lineárně polarizované rovinné elektromagnetické vlny, $\epsilon = 1$	35
8	Schéma magnetické čočky, ohniska O_1 a O_2 jsou umístěna symetricky, vzdálenosti jsou v násobcích délky čočky ℓ	37
9	Řez rovinou $z = 0$ pro bodový náboj umístěný vně (vlevo) a uvnitř (vpravo). Na obrázku vidíme siločáry elektrostatického pole a ekvipotenciální křivky ($R/a = 2$ vlevo a $a/R = 2$ vpravo).	46
10	Plošná hustota náboje indukovaného na sféře v závislosti na $\mathbf{n} \cdot \mathbf{N}$ pro různé poměry R/a (odlišeno barevně).	47
11	Bokorys a půdorys elektrostatického potenciálu a siločar elektrického pole pro homogenně nabitou kružnici.	50
12	Konfigurace nábojů potřebná k vytvoření 2^ℓ -pólu, $\ell \in \{0, 1, 2, 3\}$	55
13	Gaussovské rozložení hustoty náboje pro $a = 3, b = 2$ a $c = 1$	57
14	Elektrostatický potenciál a siločáry elektrostatického pole pro nekonečně vysoký kvádr, jehož boční stěny jsou $a = 2$ a $b = 1$ a elektrostatický potenciál na stěně $y = b$ je konstantní (pohled zhora).	59
15	Elektrostatický potenciál a siločáry elektrostatického pole pro nekonečně vysoký kvádr, jehož boční stěny jsou $a = 2$ a $b = 1$ a elektrostatický potenciál na stěnách $y = b$ a $x = a$ je konstantní (pohled zhora).	61
16	Siločáry magnetické indukce pro kruhovou smyčku (řez polorovinou $\varphi = 0$). Vodorovná osa odpovídá souřadnici ρ , svislá z . (Přirozený) logaritmus velikosti vektoru magnetické indukce odpovídá patřičné barvě spektra.	63
17	Solenoid přesný (modře dole) a aproximovaný soustavou kružnic (červeně nahoře). Počet závitů solenoidu i počet aproximujících kružnic je $N = 50$	64
18	Navinutý toroid (modře vlevo) a aproximovaný soustavou kružnic (červeně vpravo). Počet závitů toroidu i počet aproximujících kružnic je $N = 50$	64
19	Magnetická indukce solenoidu aproximovaného soustavou kružnic ($N = 20$). Patrný je jak efekt konečné délky solenoidu, tak i jeho řídkého "vinutí".	65
20	Magnetická indukce elementárního magnetického dipólu (řez rovinou xz). Barva spektra odpovídá velikosti $\ \mathbf{B}\ \ \mathbf{r}\ ^3$	67

21	Elektrostatický potenciál (barvy spektra) a siločáry elektrického pole pro dielektrickou kouli $\epsilon_2 = 2$ v dielektrickém médiu $\epsilon_1 = 1$ v původně homogenním elektrickém poli (bokorys a půdorys).	72
22	Zobrazení průběhu komplexních funkcí komplexní proměnné $E(r)$ a $B(r)$ pomocí mapování definičního oboru: v prvním obrázku je čtverec $[-3, 3] \times [-3, 3]$ i v komplexní rovině (identická funkce), v druhém a třetím obrázku je ve stejném oboru hodnot namapována funkce $E(r)$ a $B(r)$	74
23	Prvních dvacet TM módů vlnovodu ve tvaru obdélníka $a = 2$, $b = 1$. Módy jsou seřazeny od nejmenší hodnoty vlastní frekvence zleva doprava a shora dolů. Zobrazeno je E_z	78
24	Gaussovský svazek šířící se podél osy z	84
25	Fermatův princip: Paprsky, křivky, vlnoplochy	87
26	Fata morgana s pozorovatelem v počátku soustavy souřadnic	89
27	Komplexní vodivost. Je vidět, že pro nízké frekvence je vodivost přibližně reálná.	90
28	Integrační oblast V je červený plný válec, nenulové příspěvky dávají integrály přes modrou část hranice s a zelenou část hranice S	91

1. Rozměrová analýza

Veličiny, jimiž popisujeme různé fyzikální jevy, mají přiřazen rozměr a rozměru je přiřazena jednotka. My budeme používat systém jednotek SI (Système International), ale existují samozřejmě i jiné systémy jednotek. Fyzikální zákonitosti ovšem nemohou na volbě těchto jednotek záviset. Počet i volba základních rozměrů a jednotek je záležitostí konvence. Definice základních jednotek SI bude od 21. května 2019 změněna tak, že základní fyzikální konstanty budou mít přesnou hodnotu. Pouze sekunda zůstává definována jako 9 192 631 770 period záření při přechodu mezi dvěma hyperjemnými hladinami – rozštěpení vlivem spinu jádra $7/2$ a valenčního elektronu $1/2$ – základního stavu atomu ^{133}Cs v klidu při teplotě 0 K. Pro soustavu SI jsou základní rozměry a jednotky uvedeny v tabulce.

Fyzikální veličina	Rozměr	Jednotka
Hmotnost	M	kg
Délka	L	m
Čas	T	s
Elektrický proud	I	A
Teplota	Θ	K
Látkové množství	N	mol
Svítilivost	J	cd

Tabulka 1: Základní rozměry a jednotky soustavy SI

V relativistické mechanice se využívají pouze první tři rozměry M , L a T , v teorii elektromagnetického pole použijeme další rozměr I . Je snadné níže uvedený rámec rozšířit o další základní rozměry.

Ze základních veličin můžeme pomocí matematických operací (obvykle násobení, dělení, derivování a integrování) konstruovat odvozené veličiny a i jim přiřazovat rozměry a jednotky.

Z matematického hlediska je prostor rozměrů fyzikálních veličin vektorovým prostorem V (obvykle nad tělesem racionálních čísel \mathbb{Q}), jehož dimenze je rovna počtu základních rozměrů. Operace sčítání vektorů (značíme $+$) a násobení vektoru (racionálním) skalárem (značíme \cdot nebo nijak) je v tomto vektorovém prostoru dána

$$\begin{aligned}
 +: & & V \times V & \rightarrow V \\
 +: & (M^\alpha L^\beta T^\gamma I^\delta, M^{\alpha'} L^{\beta'} T^{\gamma'} I^{\delta'}) & \mapsto & M^{\alpha+\alpha'} L^{\beta+\beta'} T^{\gamma+\gamma'} I^{\delta+\delta'} \\
 \cdot: & & \mathbb{Q} \times V & \rightarrow V \\
 \cdot: & (\alpha, M^\alpha L^\beta T^\gamma I^\delta) & \mapsto & M^{\alpha\alpha} L^{\alpha\beta} T^{\alpha\gamma} I^{\alpha\delta}
 \end{aligned}$$

Fyzikální veličina	Rozměr	Jednotka
Zrychlení	LT^{-2}	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
Hybnost	MLT^{-1}	$\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
Výkon	ML^2T^{-3}	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$
Tepelný tok	MT^{-3}	$\text{kg} \cdot \text{s}^{-3}$
Elektrický náboj	TI	$\text{s} \cdot \text{A}$
Tepelná vodivost	$MLT^{-3}\Theta^{-1}$	$\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-1}$
Termoelektrický koeficient	$ML^2T^{-3}I^{-1}\Theta^{-1}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

Tabulka 2: Některé odvozené rozměry a jednotky v soustavě SI

Takto definované operace splňují axiomy vektorového prostoru, jak můžete sami snadno ověřit ¹.

Bází vektorového prostoru rozměrů fyzikálních veličin jsou rozměry základních fyzikálních veličin a proto je také jeho dimenze rovna jejich počtu. Jiná volba počtu základních rozměrů resp. jiná volba báze v onom prostoru by vedla k jiným soustavám než SI. Uveďme si příklad využití rozměrové analýzy, tj. skutečnosti, že fyzikální jevy nemohou záviset na volbě rozměrů a jednotek.

Příklad 1. Doba kyvu τ matematického kyvadla. Další rozměrné parametry potenciálně vstupující do řešení problému jsou tíhové zrychlení g , hmotnost kyvadla m , délka kyvadla ℓ a jeho maximální výchylka φ_0 . Exponenty u rozměrů jednotlivých parametrů můžeme zapsat do tabulky

	g	ℓ	m	τ	φ_0
M	0	0	1	0	0
L	1	1	0	0	0
T	-2	0	0	1	0

Parametr φ_0 již bezrozměrný je, pro ostatní parametry můžeme postupovat pomocí Gaussovy eliminace,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

která dá odpověď na otázku, jaká lineární kombinace rozměrů g , ℓ , m dá τ . Je to $g^{-1/2}\ell^{1/2}m^0$ a tedy další bezrozměrná veličina kromě φ_0 je $\sqrt{\frac{g}{\ell}}\tau$. Tyto dvě bezrozměrné veličiny na sobě

¹Definice a popis pojmu vektorový prostor je např. na Wikipedii, https://en.wikipedia.org/wiki/Vector_space

nějak závisí, tedy

$$\sqrt{\frac{g}{\ell}} \tau = f(\varphi_0),$$

tvář funkce f se pomocí rozměrové analýzy nedovíme. Ze zákona zachování energie lze spočítat, že

$$\sqrt{\frac{g}{\ell}} \tau = 2K\left(\sin \frac{\varphi_0}{2}\right), \quad \text{kde} \quad K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}}.$$

2. Speciální teorie relativity

2.1. Rotace a pohyby v rovině. Uvažme napřed infinitesimální rotaci v rovině xy , tj. lineární transformaci A , která ortonormální bázi $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ přiřadí

$$A(\mathbf{e}_x) = \mathbf{e}_x + \epsilon \mathbf{e}_y \tag{1}$$

$$A(\mathbf{e}_y) = -\epsilon \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y, \tag{2}$$

pomocí matic píšeme

$$(\mathbf{e}_x \ \mathbf{e}_y)A = (\mathbf{e}_x \ \mathbf{e}_y) \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ -\epsilon & 1 \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_x \ \mathbf{e}_y) \left[\mathbb{1} + \epsilon \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right].$$

Pro $\epsilon = 0$ musíme dostat identitu $\mathbb{1}$, dále $A(\mathbf{e}_x) \cdot A(\mathbf{e}_x) = 1 + \epsilon^2 \approx 1$, $A(\mathbf{e}_y) \cdot A(\mathbf{e}_y) = 1 + \epsilon^2 \approx 1$ a $A(\mathbf{e}_x) \cdot A(\mathbf{e}_y) = 0$. Operátor *infinitesimální rotace* A musí převádět ortonormální bázi na ortonormální bázi pro malá ϵ . Obecný vektor $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$ po otočení dává

$$A(\mathbf{r}) = A(x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y) = xA(\mathbf{e}_x) + yA(\mathbf{e}_y) = (\mathbf{e}_x \ \mathbf{e}_y) \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ -\epsilon & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{e}_k A_\ell^k r^\ell,$$

přičemž v poslední rovnosti se sčítá přes $k, \ell \in \{x, y\}$ a $r^x = x$, $r^y = y$ jsou složky vektoru \mathbf{r} v bázi $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$, tzv. *Einsteinova sčítací symbolika*. Rovněž vidíme, že infinitesimální rotace zachovávají velikost vektoru: složky rotovaného vektoru $A(\mathbf{r})$ v bázi $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ jsou $(x + \epsilon y, y - \epsilon x)^t$, tudíž jeho velikost je

$$\|A(\mathbf{r})\|^2 = (x^2 + y^2)(1 + \epsilon^2) \approx x^2 + y^2 = \|\mathbf{r}\|^2$$

Konečnou rotaci $R(\alpha)$ v rovině o úhel α získáme jako limitu pro $N \rightarrow \infty$ složení N infinitesimálních rotací s $\epsilon = \alpha/N$, tj.

$$R(\alpha) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\mathbb{1} + \frac{\alpha}{N} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]^N =: \exp \left[\alpha \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right].$$

Dále použijeme na prostřední výraz binomickou větu a dostaneme

$$R(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k = \mathbb{1} \cos \alpha + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sin \alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Rotace zachovává velikost vektorů, platí $\|R(\alpha)(\mathbf{r})\| = \|\mathbf{r}\|$.

Obecný pohyb v rovině $P(\alpha, \mathbf{a})$ dostaneme jako rotaci $R(\alpha)$ následovanou posunutím v rovině o pevný vektor \mathbf{a} . Abychom mohli zapisovat pohyby pomocí matic, je vhodné přejít do trojrozměrného prostoru xyz a rovinu euklidovskou rovinu xy realizovat jako rovinu $z = 1$ v tomto prostoru. Vektor $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$ přejde na vektor (značený stejně) $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z$. Rozdíl dvou tzv. afinních vektorů, jejichž poslední souřadnice je 1 je vektor v rovině. Otočení o α v rovině xy následované posunutím o \mathbf{a} potom můžeme napsat

$$P(\alpha, \mathbf{a})(\mathbf{r}) = (\mathbf{e}_x \quad \mathbf{e}_y \quad \mathbf{e}_z) \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & a^x \\ \sin \alpha & \cos \alpha & a^y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Jednoduše ověříme, že pohyby v rovině tvoří grupu. Složením dvou pohybů $P(\beta, \mathbf{b}) \circ P(\alpha, \mathbf{a})$ dostaneme pohyb $P(\alpha + \beta, R(\beta)\mathbf{a} + \mathbf{b})$. Inverzní prvek k $P(\alpha, \mathbf{a})$ je tedy $P(-\alpha, -R(-\alpha)\mathbf{a})$. Grupa pohybů v rovině není komutativní!

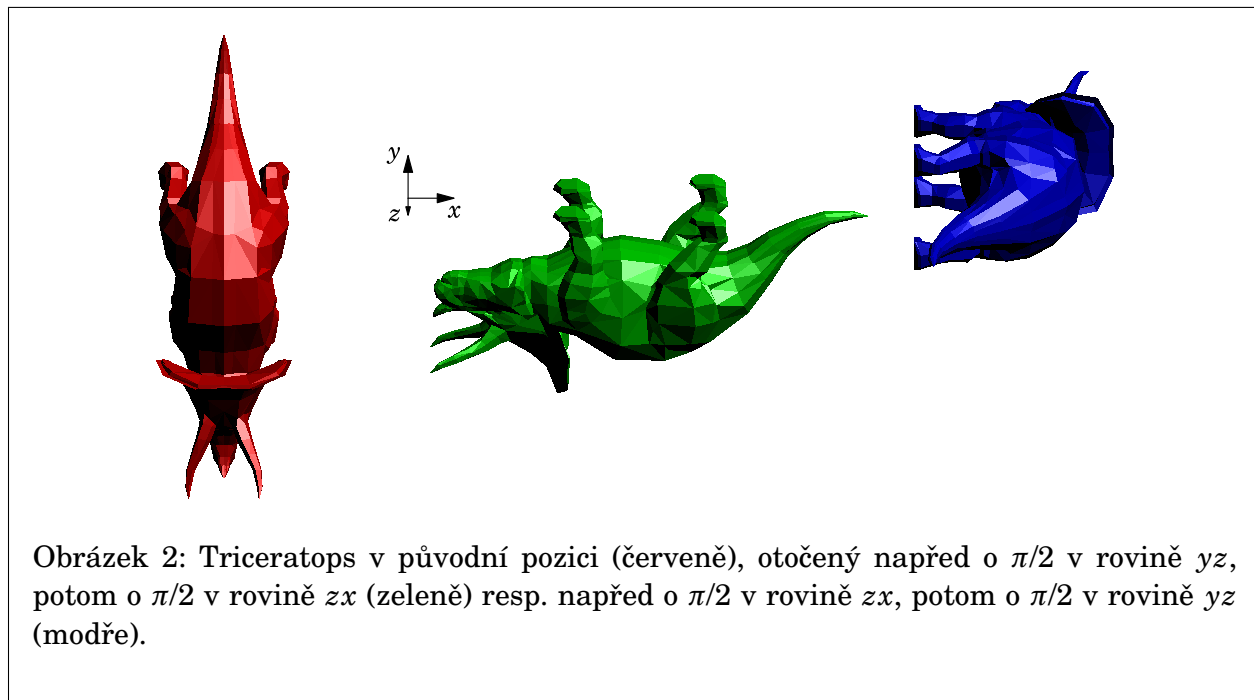
Obecný pohyb v rovině je určený třemi parametry (α, a^x, a^y) , to je v souladu s počtem stupňů volnosti tuhé oblasti.

2.2. Rotace a pohyby v prostoru. Obdobně ale obtížněji můžeme uvažovat o rotacích v prostoru. Větší obtížnost rotací v prostoru spočívá v tom, že zatímco u rotací v rovině nezáleží na pořadí, tj. $R(\beta) \circ R(\alpha) = R(\alpha + \beta) = R(\alpha) \circ R(\beta)$, u rotací v prostoru tomu tak obecně není, viz obrázek 2.

Každou rotaci $R(\psi, \theta, \varphi)$ v prostoru získáme jako kompozici rotací v souřadnicových rovinách. Kupříkladu napřed provedeme rotaci o úhel φ v rovině xy , získáme tím souřadnou soustavu $x'y'z' = z$, potom provedeme rotaci o úhel θ v rovině $y'z'$, získáme tím souřadnou soustavu $x'' = x'y''z''$ a nakonec provedeme rotaci o úhel ψ v rovině $x''y''$ a získáme tím souřadnou soustavu $XYZ = z''$. Odtud

$$R(\psi, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

trojici úhlů (φ, θ, ψ) nazýváme *Eulerovy úhly*. Dejte si pozor na různé jiné konvence, které se používají pro jejich definici, naše konvence je $z - x - z$. Leonhard Euler rovněž dokázal, že každá rotace v prostoru je rotací v rovině xy pro vhodnou volbu souřadnicových os.



Každá matice rotace R musí převádět pravotočivou ortonormální bázi na novou pravotočivou ortonormální bázi, to platí tehdy a jen tehdy pokud $R^t R = \mathbb{1}$ a $\det R = 1$. První rovnost dokážeme takto

$$R(\mathbf{e}_k) \cdot R(\mathbf{e}_\ell) = R_k^m R_\ell^n \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n = R_k^m R_\ell^n \delta_{mn} = R_k^m R_\ell^m,$$

kde

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n. \end{cases}$$

je tzv. *Kroneckerovo delta*. Druhá rovnost plyne vyloučením zrcadlení, která mění pravotočivé souřadné systémy na levotočivé.

Analogicky jako v rovině zavedeme pohyby v prostoru s maticí rotace R a posunutím \mathbf{a} . Musíme zavést čtvrtou souřadnicovou osu w . Pomocí blokových matic dostaneme

$$P(R, \mathbf{a})(\mathbf{r}) = (\mathbf{e}_x \quad \mathbf{e}_y \quad \mathbf{e}_z \quad \mathbf{e}_w) \begin{pmatrix} R & \mathbf{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Obecný pohyb je určený 6 nezávislými parametry, to je v souladu s počtem stupňů volnosti tuhého tělesa v prostoru. Pohyby v prostoru rovněž tvoří (nekomutativní) grupu.

2.3. Galileiho transformace. Inerciální vztažné soustavy se vůči sobě mohou rovnoměrně přímočaře pohybovat, mohou být vůči sobě posunuty o pevný vektor a libovolně vůči sobě otočeny, čas ve všech inerciálních vztažných soustavách plyne stejně, můžeme ovšem měnit okamžik, od kterého čas odečítáme. Pro maticový zápis předchozího musíme přidat další souřadnicovou osu t odpovídající času.

$$G(R, \mathbf{a}, b, \mathbf{v})(\mathbf{r}) = (\mathbf{e}_t \ \mathbf{e}_x \ \mathbf{e}_y \ \mathbf{e}_z \ \mathbf{e}_w) \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ \mathbf{v} & R & \mathbf{a} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 2. [5 bodů] Vrtulové letadlo letí vodorovně ve výšce h stálou rychlostí o velikosti v vzhledem k Zemi. Jeho vrtule se otáčí konstantní úhlovou rychlostí velikosti ω a její listy mají délku R .

- Zvolte vhodně souřadnou soustavu spojenou s vrtulí a vyjádřete závislost polohy, rychlosti a zrychlení špičky jednoho z listů vrtule vzhledem k vrtuli na čase.
- Zvolte vhodně souřadnou soustavu spojenou s letadlem a vyjádřete závislost polohy, rychlosti a zrychlení špičky listu vrtule z (a) vzhledem k letadlu na čase.
- Zvolte vhodně souřadnou soustavu spojenou se Zemí a vyjádřete závislost polohy, rychlosti a zrychlení špičky listu vrtule z (a) vzhledem k Zemi.
- Napište vztah pro přechod od soustavy z (a) k soustavám v (b) a (c).
- Rozhodněte, které ze soustav v (a), (b) a (c) jsou (více či méně) inerciální a proč.

Příklad 3. [10 bodů] Zjistěte, jak se skládají Galileiho transformace, dále s pomocí předchozího spočítejte inverzní Galileiho transformaci. Kolik nezávislých parametrů má grupa Galileiho transformací? [3+3+3+1]

2.4. Nerelativistická volná částice. Účinek pro nerelativistickou volnou částici, která je parametricky popsána funkcí $\mathbf{r}: t \mapsto \mathbf{r}(t)$ je

$$S[\mathbf{r}] = \int_a^b \frac{1}{2} m \|\dot{\mathbf{r}}\|^2 dt.$$

Proč je účinek dán zrovna takovým způsobem? Účinek musí být invariantní vůči Galileiho transformacím kvůli principu relativity: Fyzikální zákony musí platit ve všech inerciálních vztažných soustavách stejně.

Pokud se v euklidovském prostoru posuneme o libovolný pevný vektor \mathbf{a} , nezmění se jeho vlastnosti. Této vlastnosti se říká *homogenita prostoru*. Pokud změním počátek odečítání času, rovněž se nic nezmění. Této vlastnosti se říká *homogenita času*. Pokud se v euklidovském prostoru otočíme o R , rovněž se nezmění jeho vlastnosti. Této vlastnosti se říká *izotropie prostoru*. Co z těchto vlastností prostoru a času vyplývá pro lagrangián $L = L(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$?

$$\begin{aligned} \text{Homogenita prostoru} &\sim L(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = L(t, \mathbf{r} - \mathbf{a}, \dot{\mathbf{r}}) &&\implies L = L(t, \dot{\mathbf{r}}) \\ \text{Homogenita času} &\sim L(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = L(t - b, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) &&\implies L = L(\dot{\mathbf{r}}) \\ \text{Izotropie prostoru} &\sim L(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = L(t, R^{-1}\mathbf{r}, R^{-1}\dot{\mathbf{r}}) &&\implies L = L(\|\dot{\mathbf{r}}\|). \end{aligned}$$

Dále můžeme využít infinitesimální vlastní Galileiho transformace rychlostí $\dot{\mathbf{r}} \mapsto \dot{\mathbf{r}} + \epsilon \mathbf{v}$. Jednoduchým výpočtem dostaneme

$$\|\dot{\mathbf{r}} + \epsilon \mathbf{v}\| \approx \|\dot{\mathbf{r}}\| + \epsilon \frac{\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}}{\|\dot{\mathbf{r}}\|}$$

a tedy pomocí prvních dvou členů Taylorovy řady pro L

$$L(\|\dot{\mathbf{r}} - \epsilon \mathbf{v}\|) \approx L(\|\dot{\mathbf{r}}\|) - \epsilon \frac{dL}{d\|\dot{\mathbf{r}}\|} (\|\dot{\mathbf{r}}\|) \frac{\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}}{\|\dot{\mathbf{r}}\|}.$$

Druhý sčítanec je úplnou derivací podle času tehdy a jen tehdy, je-li L kvadratickou funkcí velikosti rychlosti, tj. $L(\|\dot{\mathbf{r}}\|) = \frac{1}{2}m\|\dot{\mathbf{r}}\|^2$. Přičtením úplné derivace libovolné funkce $f(t, \mathbf{r})$ podle času k lagrangiánu se změní účinek o konstantu a stacionární body (řešení Euler-Lagrangeových rovnic) zůstanou stejné.

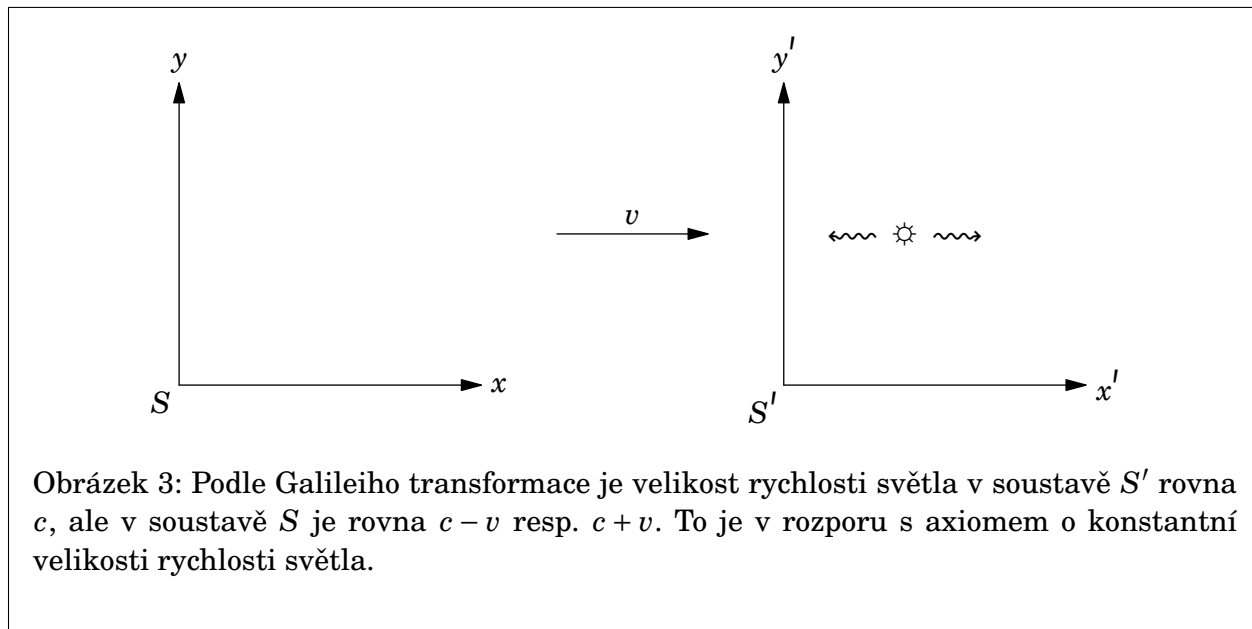
Příklad 4. [5 bodů] Výpočet proveďte a úplnou derivaci podle času určete. □

2.5. Speciální relativita v jedné prostorové dimenzi. Ve speciální teorii si ponecháme axiom, že fyzikální zákony musí platit ve všech inerciálních vztažných soustavách ve stejném tvaru, ale nebudeme zatím blíže určovat, v jakém jsou inerciální vztažné soustavy vůči sobě vzájemném vztahu. Tomuto axiomu se říká *axiom relativity*.

Další axiom, který v nerelativistické fyzice není přítomen, je *axiom konstantnosti velikosti rychlosti světla* (obecněji konečná maximální velikost rychlosti šíření libovolného signálu) ve vakuu ve všech inerciálních vztažných soustavách. O historickém vývoji, který formulaci tohoto axiomu předcházel, se můžeme dočíst např. na https://en.wikipedia.org/wiki/History_of_special_relativity. Máme tedy

$$\|\mathbf{c}\| = c = 299\,792\,458 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \text{ (přesně).}$$

Tento druhý axiom je ve zjevném rozporu s Galileiho principem relativity, jak ukazuje obrázek 3 níže.



Musíme proto modifikovat Galileiho transformaci. Zavedeme prostor událostí, události jsou body tohoto prostoru reprezentované afinními vektory $\mathbf{u} = ct\mathbf{e}_{ct} + x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$. Místo času měříme vzdálenost, kterou za tento čas urazí světlo, aby všechny složky vektoru měly stejné jednotky.

2.6. Lorentzovy transformace na přímce a v prostoru. Uvažme infinitesimální transformaci B na přímce a dvě inerciální vztažné soustavy S a S' . Vektor $\mathbf{u} = ct\mathbf{e}_{ct} + x\mathbf{e}_x$ touto infinitesimální transformací přejde na vektor

$$B(\mathbf{u}) = (\mathbf{e}_{ct} \ \mathbf{e}_x) \begin{pmatrix} 1 & \epsilon_1 \\ \epsilon_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}.$$

Požadujeme, aby rovnice pro světelný signál $ct - x = 0$ (resp. $ct + x = 0$) v soustavě S měla stejný tvar i v soustavě S' , tedy $ct' - x' = 0$. Máme

$$0 = ct' - x' = ct + \epsilon_1 x - \epsilon_2 ct - x \implies \epsilon_1 = \epsilon_2$$

a pro infinitesimální transformaci máme tedy

$$B(\mathbf{u}) = (\mathbf{e}_{ct} \ \mathbf{e}_x) \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_{ct} \ \mathbf{e}_x) \left[\mathbb{1} + \epsilon \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}.$$

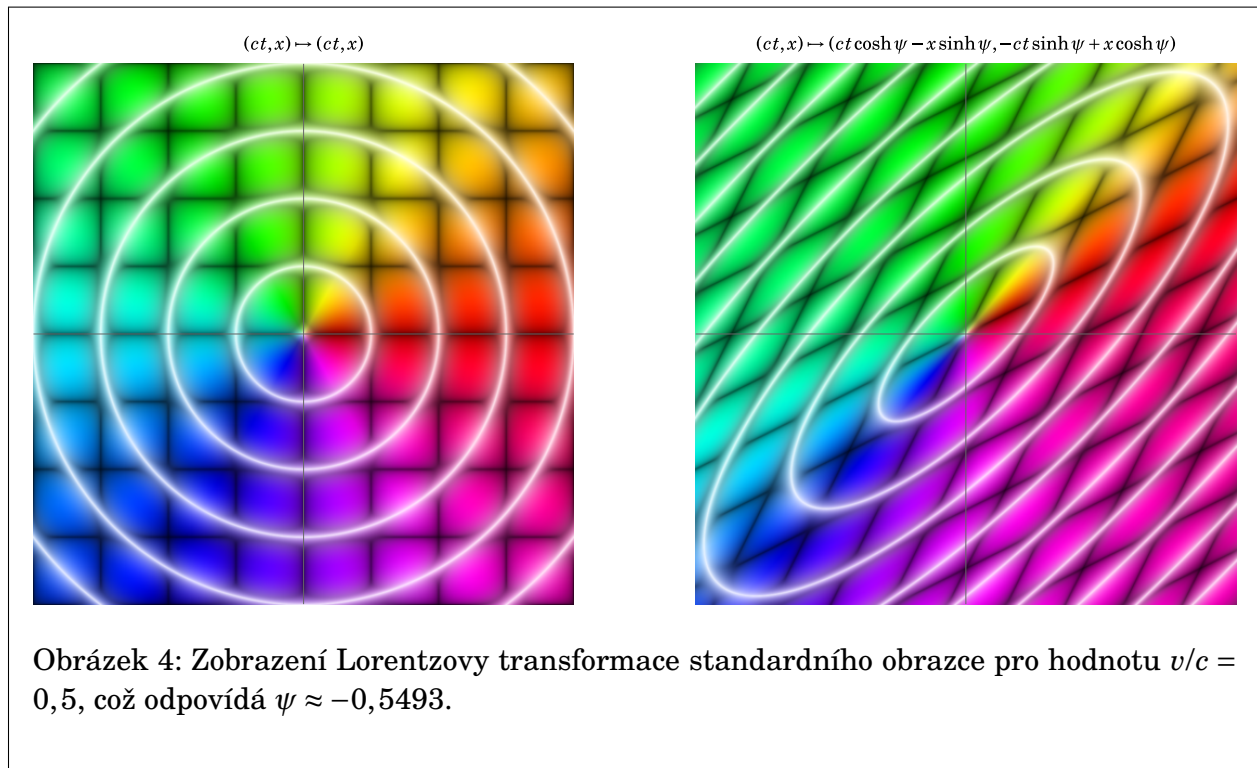
Tuto transformaci nazveme *infinitesimální Lorentzovou transformací*.

Konečnou Lorentzovu transformaci o parametr ψ získáme limitně jako kompozici N infinite-simálních Lorentzových transformací o ψ/N

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[\mathbb{1} + \frac{\psi}{N} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]^N =: \exp \left[\psi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi^k}{k!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k = \mathbb{1} \cosh \psi + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sinh \psi.$$

Všimněme si, že vždy platí $(ct')^2 - (x')^2 = (ct)^2 - x^2$, od obyčejných rotací v rovině se tedy konečné Lorentzovy transformace liší jen znaménkem minus v předchozím vztahu. Jaký je význam parametru ψ ? Uvažme počátek inerciální vztahné soustavy S' v soustavě S . Potom $0 = x' = ct \sinh \psi + x \cosh \psi$. Odtud $\tanh \psi = -x/ct = -v/c$, kde v je rychlost (počátku) soustavy S' vůči soustavě S . S využitím rovnosti $\cosh^2 \psi - \sinh^2 \psi = 1$ dostáváme

$$L(v)(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{ct} & \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{-\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ \frac{-\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$



Lorentzovu transformaci v prostoru s rychlostí v inerciální vztažné soustavě S' vůči soustavě S dostaneme tak, že napřed provedeme takovou rotaci soustav S , aby vektor rychlosti směřoval podél osy x (takové otočení zjevně existuje) a potom provedeme Lorentzovu transformaci podél této nové osy x . Matematický rozbor Lorentzových transformací je k dispozici např. na <http://physics.muni.cz/~krbek/lorentz.pdf>. Základní vlastností obecných Lorentzových transformací je, že zachovávají čtverec časoprostorové vzdálenosti $(ct')^2 - (x')^2 - (y')^2 - (z')^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$. S označením $r^0 = ct$, $r^1 = x$, $r^2 = y$, $r^3 = z$, obdobně pro čárkované souřadnice a $\eta_{00} = 1$, $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = -1$ a $\eta_{k\ell} = 0$ pro $k \neq \ell$ dostaneme $\eta_{k\ell} r^k r^\ell = \eta_{mn} (r')^m (r')^n$ analogicky jako v případě rotací. Pokud $r'^m = L_k^m r^k$, dostáváme $\eta_{k\ell} = \eta_{mn} L_k^m L_\ell^n$. Máme ale $\binom{4}{2} = 6$ souřadnicových rovin, ve kterých tyto zobecněné rotace můžeme provádět.

2.7. Jednoduché důsledky Lorentzových transformací na přímce. V tomto odstavci si uvedeme některé okamžité důsledky Lorentzových transformací, které nejsou v souladu s naší intuicí, protože ta se vyvinula přírodním výběrem pro rychlosti, jejichž velikost je velmi malá vůči rychlosti světla. Matematicky vyjádřeno je pro $v/c \ll 1$

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx 1.$$

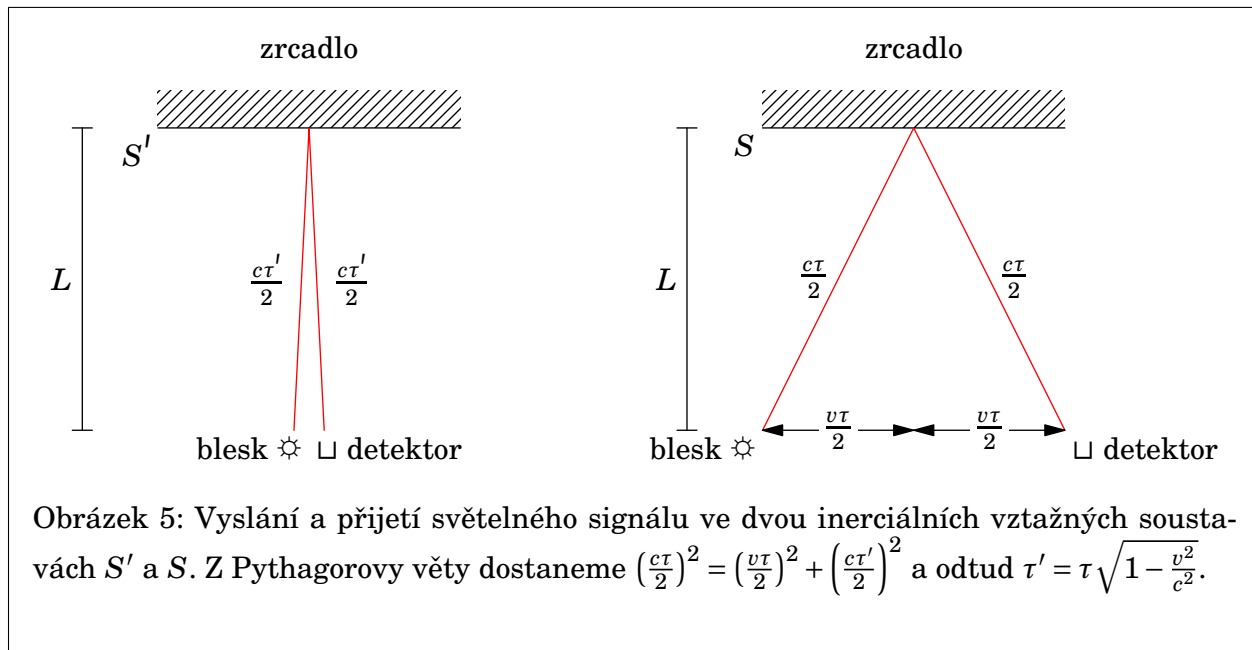
Dilatace času. Uvažme dvě inerciální vztažné soustavy S a S' orientované tak, že $x = x'$, $y \parallel y'$ a $z \parallel z'$, přičemž S' se vůči S pohybuje rychlostí $v \mathbf{e}_x$. V počátku soustav S' jsou v klidu hodiny. Potom

$$\begin{aligned} ct &= c\tau & ct' &= c\tau \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ x &= v\tau & x' &= 0 \end{aligned}$$

Nejkratší naměřený čas je v inerciální soustavě, ve které jsou hodiny v klidu. Geometricky můžeme dilataci času odvodit z obrázku 5.

Příklad 5. [5 bodů] Detekce mionů vytvořených kolizemi kosmického záření s horními vrstvami atmosféry. Střední doba života mionu je $T = 2.2 \times 10^{-6}$ s, miony vytvořené srážkami mají vysokou energii a tím pádem se pohybují rychlostmi srovnatelnými s rychlostí světla, např. vezměme $v = 0.99c$. Spočteme-li naivně dráhu mionu před rozpadem jako $vT \approx 650$ m, zjistíme, že na Zemi by téměř žádné takové miony neměly být detekovány. Přesto detekovány jsou. Proč? □

Příklad 6. [10 bodů] Cestovatel vesmírem při letu rovnoměrně přímočaře rychlostí o velikosti v vzhledem k Zemi synchronizuje své hodiny (čas $t' = 0$ pro $x' = 0$) s pozemským pozorovatelem (čas $t = 0$ pro $x = 0$). Pozorovatel na Zemi poté pozoruje oboje hodiny, ty na Zemi (čas



t) přímo, ty cestovatelovy (čas t') pomocí dalekohledu. Jaký je čas t na hodinách na Zemi, když vidí na hodinách cestovatele čas $t' = 1$ hod? Spočtete obecně a potom dosaďte $v = 0.5c$ a určete tento čas s přesností na desetinu sekundy. [1 hod 43 min 55,4 s]

Kontrakce délek. V soustavě S' necht' v klidu leží na ose x' úsečka $O'A$ spojující počátek S' s bodem A . Proto $x'_{O'} = 0$ a $x'_A = L$ po Lorentzově transformaci dostaneme $x_{O'} = vt$ a $x_A = L\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + vt$ a tedy $x_A - x_{O'} = L\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, což je menší vzdálenost než v soustavě S' , v níž je úsečka v klidu.

Příklad 7. [5 bodů] Vysvětlete detekci vysokoenergetických mionů na Zemi pomocí kontrakce délek.

Transformace rychlostí. Uvažme dvě události lišící se od sebe jen velmi málo: jedna se souřadnicemi $(ct, x, y, z)^t$, druhá se souřadnicemi $(ct + cdt, x + dx, y + dy, z + dz)^t$. Pro Lorentzovu transformaci s rychlostí soustavy S' vůči S rovnou $v\mathbf{e}_x$ dostaneme

$$L(v)(d\mathbf{u}) = (\mathbf{e}_{ct} \quad \mathbf{e}_x \quad \mathbf{e}_y \quad \mathbf{e}_z) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & \frac{-v}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ \frac{-v}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cdt \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}.$$

Odtud dostáváme

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}}, \quad \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{dt} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Získali jsme speciální tvar relativistického vzorce pro skládání rychlostí. Jak to bude vypadat pro obecný rovnoměrný přímočarý pohyb dvou inerciálních vztažných soustav?

Pro $v/c \ll 1$ dostáváme přibližně příslušnou Galileiho transformaci

$$\frac{dx'}{dt'} \approx \frac{dx}{dt} - v, \quad \frac{dy'}{dt'} \approx \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz'}{dt'} \approx \frac{dz}{dt}.$$

Příklad 8. [5 bodů] Odvodte přesnější přiblížení pro transformaci rychlostí pro $v/c \ll 1$ pomocí patřičných Taylorových řad. □

2.8. Lorentzovy a Poincarého transformace. Pro obecnou Lorentzovu transformaci L platí, že zachovává

$$\eta(L(\mathbf{r}), L(\mathbf{r})) = \eta(\mathbf{r}, \mathbf{r}),$$

kvadratickou, a s ní spojenou symetrickou bilineární formu η . Zapišme předchozí vyjádření pomocí ortonormální báze (\mathbf{e}_k) .

$$\begin{aligned} \eta(L(\mathbf{r}), L(\mathbf{r})) &= \eta(L(r^k \mathbf{e}_k), L(r^\ell \mathbf{e}_\ell)) = \eta(r^k L(\mathbf{e}_k), r^\ell L(\mathbf{e}_\ell)) = \eta(r^k L_k^i \mathbf{e}_i, r^\ell L_\ell^j \mathbf{e}_j) = \\ &= r^k L_k^i r^\ell L_\ell^j \eta(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = r^k L_k^i r^\ell L_\ell^j \eta_{ij} = r^k r^\ell \eta_{k\ell} = r^k r^\ell \eta(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_\ell) = \eta(r^k \mathbf{e}_k, r^\ell \mathbf{e}_\ell) = \eta(\mathbf{r}, \mathbf{r}). \end{aligned}$$

Rozdíl dvou událostí $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = \mathbf{r}$ je vektor a každý takový vektor můžeme vyčíslit na η , tj. spočítat $\eta(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = r^k r^\ell \eta_{k\ell}$, tzv. *kvadrát časoprostorové vzdálenosti* s^2 . Nemusí to ovšem být nezáporné číslo! Toto číslo je stejné ve všech vztažných soustavách a je proto tzv. *invariantem*. Podle jeho znaménka odlišujeme

$s^2 > 0$ časupodobná vzdálenost: je možná (ale ne nutná) příčinná souvislost obou událostí. Existuje inerciální souřadná soustava, ve které se obě události stanou ve stejném místě (ale v různých časech) a potom je pozdější událost ovlivněna událostí dřívější.

$s^2 = 0$ světupodobná vzdálenost: události lze propojit pomocí světelného signálu, např. událost \mathbf{u}_1 může být vyslání fotonu a událost \mathbf{u}_2 může být zachycení fotonu.

$s^2 < 0$ prostorupodobná vzdálenost: mezi událostmi nemůže existovat příčinná souvislost, Existuje inerciální souřadná soustava, ve které se obě události stanou ve stejném čase (ale v různých místech).

Analogická veličina k ds pro pohyby v prostoru je infinitesimální element délky oblouku křivky $d\ell$. Všimněte si dále v analogii s rotacemi v trojrozměrném prostoru, že podobně jako u obyčejných rotací můžeme zavést ještě posunutí v časoprostoru o konstantní čtyřvektor \mathbf{a} a zapsat to maticově přidáním dalšího rozměru podobně jako u pohybů v prostoru.

$$\mathbf{r}' = r'^k \mathbf{e}_k = P(L, \mathbf{a})(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{ct} & \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z & \mathbf{e}_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & \mathbf{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Za pomoci Einsteinovy sumační symboliky můžeme psát $r'^k = L_\ell^k r^\ell + a^k$. Množina všech transformací $P(L, \mathbf{a})$ tvoří tzv. *Poincarého grupu*. Stejně jako Galileiho grupa má Poincarého grupa 10 parametrů (6 nezávislých souřadnicových rovin ve 4 rozměrech a 4 nezávislá posunutí ve 4 rozměrech).

2.9. Vlastní čas. Při odvozování elementárních důsledků Lorentzovy transformace jsme se již setkali s dilatací času v inerciálních vztažných soustavách a přišli jsme na to, že nejkratší čas je měřen v inerciální vztažné soustavě, vzhledem k níž jsou hodiny, které tento čas měří, v klidu. Nyní spočteme čas, který měří hodiny spojené s částicí, která vykonává libovolný pohyb. Uvažme dvě infinitesimálně vzdálené události vzhledem k inerciální vztažné soustavě S :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{ct} & \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{e}_k r^k \quad \text{a} \quad \mathbf{u} + d\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{ct} & \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct + cd t \\ x + dx \\ y + dy \\ z + dz \end{pmatrix} = \mathbf{e}_k (r^k + dr^k).$$

Časoprostorová vzdálenost mezi nimi je invariantní $\eta(d\mathbf{u}, d\mathbf{u}) = ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \text{inv.}$ Uvažme nyní inerciální vztažnou soustavu S' , v níž jsou částice a s ní spojené hodiny právě v klidu. Potom $dx' = dy' = dz' = 0$ a tedy $ds^2 = c^2 dt'^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ a tedy

$$ds = cd t' = cd t \sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2}}.$$

Odtud dostaneme pro konečný časový interval

$$t'_2 - t'_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{\|\mathbf{v}(t)\|^2}{c^2}}.$$

Příklad 9. [5 bodů] Mionový shromažďovací prstenec v Brookhaven National Laboratories. Shromažďovací prstenec (storage ring) je typ urychlovače, kde se urychlované a vyzařující

nabité částice udržují na kruhové dráze. Uvažme, že v takovém urychlovači, který má poloměr $R = 14$ m, se pohybují miony rychlostí o velikosti $v = 0.99942c$. Naivně by se měly miony rozpadnout v průměru po $vT/2\pi R \approx 7.5$ obězích. Po kolika obězích se v průměru rozpadnou skutečně? [220 oběhů]

2.10. Volná částice ve speciální teorii relativity. Účinek pro volnou částici musí být invariantní vůči Poincarého transformacím. To zaručíme nejjednodušeji, pokud bude invariantní vůči Poincarého transformacím lagrangián. Jediný vhodný invariant je nám již znám.

$$S[\mathbf{r}] = -\alpha \int_{s_1}^{s_2} ds,$$

kde $\alpha > 0$ je zatím neurčená konstanta, jejíž význam zjistíme limitním přechodem $v/c \ll 1$. Máme

$$S = -\alpha c \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}} \approx -\alpha c \int_{t_1}^{t_2} dt \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots \right) = -\alpha c(t_2 - t_1) + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{1}{2} \frac{\alpha}{c} v(t)^2 + \dots$$

Odtud dostáváme srovnáním druhého sčítance s nerelativistickým lagrangiánem $\alpha = mc$, kde $m > 0$ je (klidová) hmotnost částice. Účinek pro volnou částici je tedy $-mc^2$ -násobkem vlastního času, tj. času, který změří hodiny pohybující se s částicí.

Příklad 10. [5 bodů] Odvoďte Euler-Lagrangeovy rovnice pro výše uvedený účinek a určeme jejich řešení. Ověřme, že se jedná o minimum.

Odvodíme výsledek pro jednu prostorovou dimenzi, pro tři prostorové dimenze je postup zcela analogický. Účinek je

$$S[x(t)] = -mc^2 \int_0^T \sqrt{1 - \dot{x}^2/c^2} dt, \quad x(0) = 0, \quad x(T) = X.$$

Pro stacionární dráhu x musí platit, že $\partial L / \partial \dot{x} = p = \text{konst.}$ a máme tedy

$$p = \frac{m\dot{x}}{\sqrt{1 - \dot{x}^2/c^2}}.$$

Odtud

$$\dot{x} = \frac{\frac{p}{m}}{\sqrt{1 + \left(\frac{p}{mc}\right)^2}}$$

a

$$x \sqrt{1 + \left(\frac{p}{mc}\right)^2} - \frac{pt}{m} = 0$$

Konstantu p určíme jako

$$\frac{p}{mc} = \frac{\frac{X}{cT}}{\sqrt{1 - \left(\frac{X}{cT}\right)^2}}$$

a účinek po této stacionární dráze je

$$S[x] = -mc^2 T \sqrt{1 - \left(\frac{X}{cT}\right)^2}.$$

Pro důkaz, že se jedná o minimum účinku, musíme ukázat, že pro dráhy blízké předchozí stacionární dráze účinek vždy vzroste.

$$S[x + \epsilon \delta x] = -mc^2 \int_0^T \sqrt{1 - \frac{(\dot{x} + \epsilon \delta \dot{x})^2}{c^2}} dt \approx S[x] + \epsilon \delta S[x] + \frac{\epsilon^2}{2} \delta^2 S[x] + \dots,$$

kde $\delta x(0) = \delta x(T) = 0$. První sčítanec jsme již spočetli, druhý sčítanec je pro stacionární dráhu nulový, spočteme nyní třetí sčítanec, tj.

$$\delta^2 S[x] = \int_0^T \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2} (\dot{x})(\delta \dot{x})^2 = mc^4 \left[1 - \left(\frac{X}{cT}\right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \int_0^T (\delta \dot{x})^2 dt.$$

Tento třetí sčítanec je pro $\delta x \neq 0$ vždy kladný, jedná se tedy skutečně o lokální (i globální) minimum.

Příklad 11. [5 bodů] Nyní již můžeme využít obecně platné metody teoretické mechaniky a odvodit výraz pro zobecněnou hybnost a hamiltonián. Provedme to!

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial(-mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2})}{\partial v^2} \frac{\partial v^2}{\partial \dot{x}} = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \dot{x} \\ p_y &= \frac{\partial(-mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2})}{\partial v^2} \frac{\partial v^2}{\partial \dot{y}} = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \dot{y} \\ p_z &= \frac{\partial(-mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2})}{\partial v^2} \frac{\partial v^2}{\partial \dot{z}} = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \dot{z} \end{aligned}$$

Tři předchozí rovnice umocníme na druhou a sečteme. Dostaneme

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = \frac{m^2 v^2}{1 - v^2/c^2} \Rightarrow v^2 = \frac{p^2 c^2}{m^2 c^2 + p^2}.$$

Pro hamiltonián dostaneme

$$\begin{aligned} H = p_x v_x + p_y v_y + p_z v_z - L &= \frac{mv^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} = mc^2 \frac{v^2/c^2 + 1 - v^2/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \\ &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = c \sqrt{m^2 c^2 + p^2}. \end{aligned}$$

Vidíme, že $H^2/c^2 - p^2 = m^2c^2$, tj. $H/c\mathbf{e}_{ct} - p_x\mathbf{e}_x - p_y\mathbf{e}_y - p_z\mathbf{e}_z$ je časupodobný čtyřvektor konstantní velikosti mc . Též vidíme, že částice v klidu o hmotnosti m má nenulovou energii mc^2 ; kinetickou energii relativistické volné částice tedy získáme, odečteme-li tuto klidovou energii od celkové energie částice H . \square

2.11. Relativistická kinematika. V dalším si zavedeme čtyřvektor rychlosti a zrychlení. Trajektorii pohybující se částice budeme považovat za posloupnost událostí parametrizovaných libovolným parametrem ξ . Všechny výrazy jsou nejjednodušší, zvolíme-li za tento parametr s , tedy c -násobek vlastního času, obdobně jako v případě pohybů, kde nejjednodušší vyjádření všech jejich charakteristik dostáváme tehdy, vyjadřujeme-li všechny veličiny parametricky pomocí délky oblouku. Napřed spočteme zobecněnou čtyřrybnost

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dr^k}{d\xi}\right)} = \frac{mc\eta_{k\ell} \frac{dr^\ell}{d\xi}}{\sqrt{\eta_{ij} \frac{dr^i}{d\xi} \frac{dr^j}{d\xi}}}.$$

Po dosazení $d\xi = ds$ a zavedení čtyřrychlosti $u^k = \frac{dr^k}{ds}$, resp. $u_k = \eta_{k\ell}u^\ell$, dostaneme

$$p_k = mcu_k,$$

protože $ds^2 = \eta_{ij}dr^i dr^j$ a odtud $\eta_{ij}u^i u^j = 1$.

Příklad 12. [5 bodů] Spočítejte složky čtyřrychlosti pomocí obyčejné rychlosti. Máme $ds = cdt\sqrt{1 - \|\mathbf{v}\|^2/c^2}$ a

$$\frac{cdt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\|\mathbf{v}\|^2}{c^2}}}, \quad \frac{dx}{ds} = \frac{\frac{dx}{dt}}{c\sqrt{1 - \frac{\|\mathbf{v}\|^2}{c^2}}}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{\frac{dy}{dt}}{c\sqrt{1 - \frac{\|\mathbf{v}\|^2}{c^2}}}, \quad \frac{dz}{ds} = \frac{\frac{dz}{dt}}{c\sqrt{1 - \frac{\|\mathbf{v}\|^2}{c^2}}}.$$

\square

Odvodme nyní pohybové rovnice v časoprostorové formulaci.

$$\delta S = -mc\delta \int_{s_1}^{s_2} ds.$$

Odtud s využitím $ds = \sqrt{\eta_{jk}dx^j dx^k}$ dostaneme

$$\delta S = -mc \int_{s_1}^{s_2} \frac{\eta_{jk}dx^j \delta dx^k}{ds} = S = -mc \int_{s_1}^{s_2} \eta_{jk}u^j \delta dx^k,$$

což metodou *per partes* upravíme dále na

$$\delta S = -mc\eta_{jk}u^j \delta x^k \Big|_{s_1}^{s_2} + mc \int_{s_1}^{s_2} \eta_{jk} \frac{du^j}{ds} \delta x^k = 0$$

Počáteční a koncová událost jsou pro stacionární dráhu pevné, platí tedy $\delta x(s_1) = \delta x(s_2) = 0$ a z libovolnosti δx dostáváme relativistickou pohybovou rovnici pro volnou částici

$$\frac{du^j}{ds} = 0.$$

Zavedeme si proto čtyřzrychlení \mathbf{w} , pro jehož složky v kartézské bázi dostáváme

$$w^k = du^k/ds = d^2 r^k/ds^2.$$

Naopak, vezmeme-li stacionární dráhu $du^j/ds = 0$, pevný počáteční bod $\delta x(s_1) = 0$ a proměnný koncový bod, dostaneme

$$\delta S = -mc\eta_{jk}u^j\delta x^k$$

a odtud máme

$$p_j = -\frac{\partial S}{\partial x^j},$$

což nám umožňuje zapsat relativisticky Hamilton-Jacobiho rovnici jako

$$\eta^{jk}p_j p_k = \eta^{jk}\frac{\partial S}{\partial x^j}\frac{\partial S}{\partial x^k} = m^2 c^2.$$

Derivací vztahu $\eta(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 1$ podle s dále dostaneme $\eta(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \eta_{jk}u^j w^k = 0$. Jako aplikaci předchozího budeme uvažovat relativistický ekvivalent vrhů, další aplikace uvedeme později.

2.12. Relativistický pohyb s konstantním zrychlením. Při rovnoměrně zrychleném pohybu ve speciální teorii relativity nemůže růst rychlost nade všechny meze, jelikož by tím byla překonána rychlost světla. Postupovat musíme následovně: vždy existuje inerciální vztahná soustava S' , vůči níž je zrychlující hmotný bod v daném okamžiku v klidu a v této soustavě můžeme akcelerometrem měřit okamžité zrychlení. Takovému zrychlení říkáme vlastní zrychlení. Lorentzovou transformací docílíme, že počáteční rychlost bude nulová a budeme uvažovat pohyb s konstantním vlastním zrychlením. V okamžité klidové inerciální soustavě je čtyřrychlost dána jako $\mathbf{u} = \mathbf{e}_{ct}$, její složky jsou $(1, 0, 0, 0)$. Čtyřzrychlení v této soustavě je tedy dáno jako $\mathbf{w} = w\mathbf{e}_{x'}$, jeho složky jsou $(0, w, 0, 0)$ tak, aby $\eta(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = 0$, přičemž $w = \text{konst.}$ V inerciální vztahné soustavě S pozorovatele má zrychlení s označením $\beta = \dot{x}/c$ složky

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix}$$

Čtyřrychlost má v soustavě pozorovatele složky

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}.$$

Platí $\mathbf{w} = d\mathbf{u}/ds$ a proto rozepsáním druhé složky

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = \frac{cdt}{ds} \frac{d}{cdt} \left(\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} w$$

a odtud

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = cw$$

Po integraci

$$\left(\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = cwt + \text{konst.}$$

Integrační konstantu můžeme položit rovnou nule, protože $\beta(0) = 0$. Odtud máme

$$\frac{\dot{x}}{c} = \beta = \frac{wct}{\sqrt{1+(wct)^2}}$$

a další elementární integrací získáme

$$x = \int dt \frac{wc^2 t}{\sqrt{1+(wct)^2}} = \frac{1}{w} \sqrt{1+(wct)^2} + \text{konst.}$$

Integrační konstantu zvolme tak, aby $x(0) = 0$. Pak

$$wx = \sqrt{1+(wct)^2} - 1.$$

Dále spočteme vlastní čas, tj. čas, který měří hodiny spojené s rovnoměrně zrychlujícím hmotným bodem. Víme, že

$$\tau = \int_0^t dt' \sqrt{1-\beta(t')^2} = \int_0^t \frac{dt'}{\sqrt{1+(wct')^2}} = \left| \begin{array}{l} wct' = \sinh \psi \\ wcdt' = \cosh \psi d\psi \end{array} \right| = \frac{1}{wc} \operatorname{arcsinh} wct.$$

Příklad 13. [15 bodů] Mějme dvě dvojčata, z nichž jedno zůstane na Zemi a druhé se vydá na cestu k Sigma Draconis vzdálené 18.8 ly v kosmické lodi s vlastním zrychlením rovným tíhovému zrychlení na Zemi. První polovinu cesty rovnoměrně zrychluje, druhou polovinu cesty rovnoměrně zpomaluje. U Sigma Draconis se otočí a letí hned zpět.

- O kolik starší od odletu kosmické lodi bude dvojče zůstavší na Zemi při jejím návratu?
- O kolik starší od odletu bude po přiletu dvojče cestující k Sigmě Draconis?
- Jaké maximální rychlosti vzhledem k Zemi loď dosáhne?

Řešení. Čas budeme měřit v letech, vzdálenost ve světelných rocích. Potom $c = 1\text{ly/y}$ a $w = 1.032\text{ ly/y}^2$. Polovina vzdálenosti k Sigmě Draconis je $x = 9.4\text{ ly}$. Stačí vše spočítat pro první čtvrtinu cesty. Podle předchozího máme

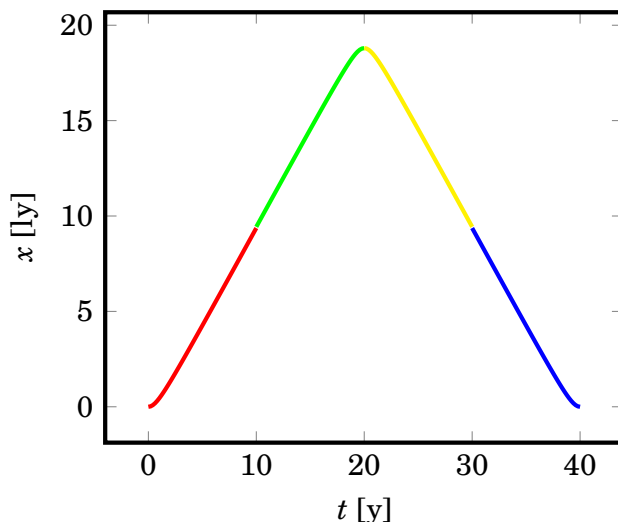
$$t = \frac{1}{wc} \sqrt{(wx + 1)^2 - 1} = 10\text{ y.}$$

Dvojče na Zemi bude tedy po návratu lodi starší o 40 let. Dále spočteme vlastní čas, o který zestárne dvojče na lodi

$$\tau = \frac{1}{wc} \operatorname{arcsinh} wct = 2,9\text{ y.}$$

Dvojče v kosmické lodi bude tedy po návratu starší o necelých 12 let. Maximální rychlost vzhledem k Zemi i Sigmě Draconis bude mít loď na půli cesty a to

$$\dot{x} = \frac{wc^2 t}{\sqrt{1 + (wct)^2}} = c \sqrt{1 - \frac{1}{(wx + 1)^2}} = 0.995\text{ ly/y.}$$



Obrázek 6: Časoprostorový diagram cesty dvojčete v kosmické lodi vzhledem k dvojčeti na Zemi. Všimneme si, že tečna ke grafu má nulovou směrnici pro $t = 0, 20$ a 40 let, což odpovídá nulové rychlosti. Nejstrmější směrnice je pro $t = 10$ a 30 let, což odpovídá největší velikosti rychlosti.

2.13. Nerelativistická limita pro relativistický rovnoměrně zrychlený pohyb. Pro malé rychlosti oproti rychlosti světla $wct \ll 1$ můžeme psát pro rychlost

$$\dot{x} = \frac{wc^2 t}{\sqrt{1+(wct)^2}} \approx wc^2 t \left[1 - \frac{(wct)^2}{2} + \frac{3(wct)^4}{8} - \dots \right] \approx wc^2 t + \dots$$

Pro polohu potom můžeme psát

$$x = \frac{1}{w} \left[\sqrt{1+(wct)^2} - 1 \right] \approx \frac{1}{w} \left[\frac{(wct)^2}{2} - \frac{(wct)^4}{8} - \dots \right] \approx \frac{wc^2 t^2}{2} - \dots$$

Pro vlastní čas máme

$$\tau = \frac{1}{wc} \operatorname{arcsinh} wct \approx \frac{1}{wc} \left[wct - \frac{(wct)^3}{6} + \dots \right] \approx t - \dots$$

2.14. Relativistická hybnost. Stejně jako v nerelativistické mechanice platí zákon zachování čtyřhybnosti pro uzavřenou soustavu hmotných bodů. Máme (sčítáme přes všechny částice)

$$\sum p^i = \text{konst.}$$

To můžeme po složkách zapsat jako

$$\sum \frac{H}{c} = \text{konst.} \quad \sum \mathbf{p} = \text{konst.}$$

2.15. Relativistický moment hybnosti. Uvažujme o obecné infinitezimální Lorentzově transformaci

$$x'^i = x^i + \delta\Omega_k^i x^k.$$

Musí přibližně platit

$$\eta_{ij} x'^i x'^j = \eta_{ij} \left(x^i + \delta\Omega_k^i x^k \right) \left(x^j + \delta\Omega_\ell^j x^\ell \right) \approx \eta_{ij} x^i x^j + \delta\Omega_{jk} x^j x^k + \delta\Omega_{i\ell} x^i x^\ell = \eta_{ij} x^i x^j + 2\delta\Omega_{jk} x^j x^k.$$

Odtud dostáváme

$$\delta\Omega_{jk} = -\delta\Omega_{kj}$$

a pro variaci účinku máme (součet je přes všechny částice)

$$\delta S = -\sum p_i \delta x^i = -\delta\Omega_{ik} \sum p^i x^k = -\frac{1}{2} \delta\Omega_{ik} \sum \left(p^i x^k - p^k x^i \right).$$

Pro uzavřenou soustavu hmotných bodů se tedy zachovává antisymetrický tenzor momentu hybnosti

$$M^{ik} = \sum \left(p^i x^k - p^k x^i \right) = \text{konst.}$$

Příklad 14. [5 bodů] Spočtěte a interpretujte tento tenzor pomocí běžných veličin. Po dosazení $p^i \sim (H/c, \mathbf{p})^t$ a $x^i \sim (ct, \mathbf{r})^t$ dostaneme

$$M^{ik} \sim \begin{pmatrix} 0 & \Sigma \left(\frac{H}{c} \mathbf{r} - ct \mathbf{p} \right)^t \\ \Sigma \left(ct \mathbf{p} - \frac{H}{c} \mathbf{r} \right) & -M \end{pmatrix}, \quad \text{kde} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & M_z & -M_y \\ -M_z & 0 & M_x \\ M_y & -M_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Zde je $\mathbf{M} = \Sigma \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. Relativistický zákon zachování hybnosti v sobě tedy obsahuje navíc zachování rovnoměrného pohybu hmotného středu systému v relativistické verzi. Máme totiž

$$\frac{\Sigma \left(t \mathbf{p} - \frac{H}{c^2} \mathbf{r} \right)}{\Sigma H} = \text{konst.}$$

a tedy definujeme-li

$$\mathbf{R} = \frac{\Sigma H \mathbf{r}}{\Sigma H} \quad \text{a} \quad \mathbf{V} = \frac{c^2 \Sigma \mathbf{p}}{\Sigma H},$$

dostaneme

$$\mathbf{R} - \mathbf{V}t = \text{konst.}$$

3. Relativistický pohyb částic v elektromagnetickém poli

V této části se budeme zabývat pohybem nabitých částic v elektromagnetickém poli. Pole budeme považovat za dané, zanedbáme tedy skutečnost, že zrychlující nabitá částice je sama zdrojem elektromagnetického pole. Částici, která má na okolní elektromagnetické pole zanedbatelný vliv, nazýváme testovací částicí. Ukazuje se, že elektromagnetické pole lze popsat pomocí pole čtyřvektorů $\mathbf{A} = A^i \mathbf{e}_i$. Toto pole sdružuje dohromady skalární a vektorový potenciál.

3.1. Účinek pro pohyb částice v elektromagnetickém poli. Již dříve jsme odvodili, že účinek pro volnou relativistickou částici o hmotnosti m je

$$S_{\text{částice}}[\mathbf{r}] = -mc \int ds$$

Pro více částic s různými hmotnostmi, které mezi sebou neinteragují, dostaneme účinek jako součet účinků pro jednotlivé částice.

Z relativistické invariance vyplývá, že lokálně invariantní Lagrangeovu hustotu související s interakcí částice s elektromagnetickým polem dostaneme pro

$$S_{\text{interakce}}[\mathbf{r}] = \alpha \int \eta(\mathbf{A}(\mathbf{r}), d\mathbf{r}) = \alpha \int \eta(\mathbf{A}(\mathbf{r}), \mathbf{u}) ds = \alpha \int A_i(x^j) dx^i = \alpha \int A_i(x^j) u^i ds,$$

kde integrujeme po křivce v časoprostoru, tzv. světočáře částice. Integrál nezávisí na její parametrizaci. Konstantu α určíme později z pohybových rovnic. Takto definovaný účinek nezávisí na lokální volbě souřadné soustavy, protože ani $\eta(\mathbf{A}, \mathbf{u})$ na této volbě nezávisí.

3.2. Pohybové rovnice pro nabitou částici v elektromagnetickém poli. Účinek je dán jako

$$S[\mathbf{r}] = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left(-mc \sqrt{\eta_{ij} \frac{dx^i}{d\xi} \frac{dx^j}{d\xi}} + \alpha A_i(x^k) \frac{dx^i}{d\xi} \right) d\xi,$$

kde ξ je libovolný parametr a $x^i(\xi_1) = a^i$ a $x^i(\xi_2) = b^i$ jsou pevně zadané počáteční a koncový bod v časoprostoru.

Spočteme nyní první variaci tohoto funkcionálu, jejím položením rovno nule získáme stacionární bod S , což jsou právě pohybové rovnice.

$$\begin{aligned} \delta S[\mathbf{r}] &= \delta \int_{s_1}^{s_2} (-mcds + \alpha A_i dx^i) = \int_{s_1}^{s_2} \left(-mc \frac{\eta_{ij} dx^i d\delta x^j}{ds} + \alpha A_j d\delta x^j + \alpha \delta A_j dx^j \right) = \\ &= -(m c u_i - \alpha A_i) \delta x^i \Big|_{s_1}^{s_2} + \int_{s_1}^{s_2} \left(m c d u_i \delta x^i - \alpha d A_i \delta x^i + \alpha \delta A_i dx^i \right) = \left| \begin{array}{l} d A_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^j} dx^j \\ \delta A_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^j} \delta x^j \end{array} \right| = \\ &= -(m c u_i - \alpha A_i) \delta x^i \Big|_{s_1}^{s_2} + \int_{s_1}^{s_2} \left[m c \frac{d u_i}{ds} - \alpha \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^i} \right) \frac{d x^j}{ds} \right] \delta x^i ds. \end{aligned}$$

Označme

$$F_{ij} = \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j},$$

tzv. *tenzor elektromagnetického pole*. Všimněme si jeho antisymetrie $F_{ij} = -F_{ji}$. Pro $\delta x^i(s_1) = \delta x^i(s_2) = 0$ s jinak libovolným δx potom dostaneme pohybovou rovnici

$$m c \frac{d u_i}{ds} = -\alpha F_{ij} u^j$$

a pro splnění pohybové rovnice a $\delta x^i(s_1) = 0$ dostaneme

$$\delta S = -(m c u_i - \alpha A_i) \delta x^i$$

a odtud

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial x^i} = -m c u_i + \alpha A_i.$$

Hamilton-Jacobiho rovnice pro částici v elektromagnetickém poli tedy je

$$m^2 c^2 = m^2 c^2 \eta^{ij} u_i u_j = \eta^{ij} \left(\frac{\partial S}{\partial x^i} - \alpha A_i \right) \left(\frac{\partial S}{\partial x^j} - \alpha A_j \right).$$

Konstanta α souvisí s tím, nakolik na danou částici působí elektromagnetické pole, tedy s volbou jednotky náboje. Její hodnotu získáme rozepsáním pohybových rovnic, přitom záleží na volbě soustavy jednotek. V našem případě používáme soustavu SI, některé starší učebnice používají soustavu CGS ² a některé pokročilé knihy Lorentz-Heavisideovu soustavu jednotek. ³

Označme $A_i = (\Phi/c, -A_x, -A_y, -A_z)$. Potom

$$\begin{aligned} F_{01} &= -\frac{\partial A_x}{\partial ct} - \frac{\partial \Phi/c}{\partial x} = \frac{1}{c} E_x, & F_{23} &= \frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y} = -B_x, \\ F_{02} &= -\frac{\partial A_y}{\partial ct} - \frac{\partial \Phi/c}{\partial y} = \frac{1}{c} E_y, & F_{31} &= \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} = -B_y, \\ F_{03} &= -\frac{\partial A_z}{\partial ct} - \frac{\partial \Phi/c}{\partial z} = \frac{1}{c} E_z, & F_{12} &= \frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} = -B_z. \end{aligned}$$

Pohybové rovnice tedy s označením $\gamma = 1/\sqrt{1 - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)/c^2}$ dávají

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \frac{H}{c} &= \frac{\gamma}{c} \frac{d}{dt} \frac{H}{c} = -\alpha \gamma \frac{\mathbf{E}_x \dot{x} + \mathbf{E}_y \dot{y} + \mathbf{E}_z \dot{z}}{c^2}, \\ -\frac{d}{ds} p_x &= -\frac{\gamma}{c} \frac{d}{dt} p_x = -\alpha \left[-\gamma \frac{E_x}{c} - \frac{\gamma}{c} (B_z \dot{y} - B_y \dot{z}) \right], \\ -\frac{d}{ds} p_y &= -\frac{\gamma}{c} \frac{d}{dt} p_y = -\alpha \left[-\gamma \frac{E_y}{c} - \frac{\gamma}{c} (B_x \dot{z} - B_z \dot{x}) \right], \\ -\frac{d}{ds} p_z &= -\frac{\gamma}{c} \frac{d}{dt} p_z = -\alpha \left[-\gamma \frac{E_z}{c} - \frac{\gamma}{c} (B_y \dot{x} - B_x \dot{y}) \right]. \end{aligned}$$

Po vykrácení γ/c^2 z nulté rovnice a γ/c ze zbylých tří rovnic, vidíme, že $\alpha = -q$ je elektrický náboj a s trojrozměrnými vektory dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= q \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}, \\ \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \end{aligned}$$

tj. výraz pro časovou změnu energie a Lorentzovy rovnice. Pozor,

$$\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}!$$

3.3. Pohyb nabitě částice v konstantním elektrickém poli. Elektrické pole orientujme podél osy x , vektor počáteční hybnosti nechť leží v rovině xy . Pohyb bude potom v rovině xy a pohybové rovnice budou mít tvar

$$\dot{p}_x = qE, \quad \dot{p}_y = 0.$$

²Viz např. https://en.wikipedia.org/wiki/Centimetre-gram-second_system_of_units

³Viz např. https://en.wikipedia.org/wiki/Lorentz-Heaviside_units

Po integraci dostaneme

$$p_x = qEt, \quad p_y = p_0,$$

počátek odečítání času jsme zvolili tak, aby $p_x = 0$. Dále víme, že $H^2 = m^2c^4 + p^2c^2 = m^2c^4 + (cqEt)^2 + c^2p_0^2$. Dále máme $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{p}c^2/H$, což dává

$$\dot{x} = \frac{p_x c^2}{H} = \frac{c^2 qEt}{\sqrt{H_0^2 + (cqEt)^2}}.$$

Po integraci dostaneme

$$x = \frac{1}{qE} \sqrt{H_0^2 + (cqEt)^2}.$$

Dále máme

$$\dot{y} = \frac{p_y c^2}{H} = \frac{p_0 c^2}{\sqrt{H_0^2 + (cqEt)^2}},$$

což po integraci dává

$$y = \frac{p_0 c}{qE} \operatorname{arcsinh} \frac{cqEt}{H_0}.$$

Rovnice dráhy je dána

$$\frac{qEx}{H_0} = \cosh \frac{qEy}{p_0 c}.$$

V této rovnici poznáme řetězovku.

Příklad 15. [5 bodů] Napište řešení pohybových rovnic a rovnici dráhy v přiblížení $\beta \ll 1$. \square

3.4. Pohyb nabité částice v konstantním magnetickém poli. Uvědomme si, že energie se při pohybu v čistě magnetickém poli zachovává. Zvolme magnetickou indukci ve směru osy z . Máme $\mathbf{p} = H\dot{\mathbf{r}}/c^2$ a odtud

$$\frac{H}{c^2} \frac{d}{dt} \dot{\mathbf{r}} = q\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}.$$

Ve složkách s označením $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$ a $\omega = qc^2B/H$ dostaneme

$$\dot{v}_x = \omega v_y, \quad \dot{v}_y = -\omega v_x, \quad \dot{v}_z = 0.$$

Druhou rovnici vynásobme i a přičtíme k první. Dostaneme

$$\frac{d}{dt}(v_x + iv_y) = -i\omega(v_x + iv_y),$$

po integraci

$$v_x + iv_y = a \exp -i(\omega t), \quad a \in \mathbb{C},$$

a po další integraci

$$x + iy = b - \frac{a}{i\omega} \exp -i(\omega t), \quad b \in \mathbb{C}$$

Označme p_{xy} projekci hybnosti do roviny xy . Potom s $r = p_{xy}/qB$, vhodnou volbou počáteční polohy, počátku odečítání času a triviální integrací třetí rovnice máme

$$x = r \cos \omega t, \quad y = -r \sin \omega t, \quad z = v_{0z} t,$$

což je parametrická rovnice šroubovice.

Příklad 16. [10 bodů] Vyšetřete pohyb nabitě částice v konstantním elektrickém a magnetickém poli za předpokladu, že \mathbf{E} je rovnoběžné s \mathbf{B} . □

Příklad 17. [5 bodů] Předchozí úlohu řešte v nerelativistické aproximaci. □

3.5. Lorentzova transformace elektromagnetického pole. Jak se transformují složky čtyřvektoru elektromagnetického potenciálu při přechodu mezi inerciálními vztažnými soustavami? Stejně jako složky čtyřvektoru polohy, tj. $A^j = L_k^j A'^k$, což pro pohyb S' vůči S rychlostí v podél společné osy $x = x'$ s označením $\beta = v/c$ a $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ dává

$$\frac{\Phi}{c} = \gamma \left(\frac{\Phi'}{c} + \beta A'_x \right), \quad A_x = \gamma \left(A'_x + \beta \frac{\Phi'}{c} \right), \quad A_y = A'_y, \quad A_z = A'_z.$$

Obdobně pro složky tenzoru elektromagnetického pole dostáváme $F_{ij} = L_i^k F'_{kl} L_j^\ell$, což dává

$$\frac{E_x}{c} = \frac{E'_x}{c}, \quad \frac{E_y}{c} = \gamma \left(\frac{E'_y}{c} + \beta B'_z \right), \quad \frac{E_z}{c} = \gamma \left(\frac{E'_z}{c} - \beta B'_y \right),$$

a

$$B_x = B'_x, \quad B_y = \gamma \left(B'_y - \beta \frac{E'_z}{c} \right), \quad B_z = \gamma \left(B'_z + \beta \frac{E'_y}{c} \right).$$

Příklad 18. [5 bodů] Aproximujte předchozí vztahy pro $\beta \ll 1$. □

3.6. Invarianty elektromagnetického pole. Můžeme pomocí tenzoru elektromagnetického pole zkonstruovat skalární výrazy, jež nezávisí na volbě inerciální vztažné soustavy? Ukazuje se, že je tomu tak pro

$$\eta^{ik} \eta^{j\ell} F_{ij} F_{kl} \quad \text{a pro} \quad \epsilon^{ijkl} F_{ij} F_{kl},$$

kde ϵ^{ijkl} je úplně antisymetrický tenzor, kde $\epsilon^{0123} = 1$ a pro ostatní hodnoty indexů máme

$$\epsilon^{ijkl} = \begin{cases} 1 & ijkl \text{ je sudá permutace } 0123 \\ -1 & ijkl \text{ je lichá permutace } 0123 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

První invariant spočteme jako $2(\|\mathbf{E}\|^2/c^2 - \|\mathbf{B}\|^2)$ a druhý, tzv. relativní invariant jako $-4\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}/c$ pomocí trojrozměrných vektorů elektromagnetického pole.

3.7. Nejednoznačnost určení potenciálů. Do dříve odvozených pohybových rovnic vstupuje pouze tenzor elektromagnetického pole $F_{ij} = \partial A_j/\partial x^i - \partial A_i/\partial x^j$. Změníme-li čtyřpotenciál na $A'_j = A_j + \partial f/\partial x^j$, kde $f = f(x^k)$ je libovolná dostatečně hladká funkce událostí, zůstává F_{ij} nezměněno.

Příklad 19. [5 bodů] Dokažte to! □

Vždy můžeme požadovat, aby platilo $\partial A^i/\partial x^i = 0$, tzv. *Lorenzova kalibrační podmínka*. Dokažte to! Přejdeme k čtyřpotenciálu $A'_j = A_j + \partial f/\partial x^j$. Chceme, aby A'_j splňovalo Lorenzovu kalibrační podmínku, tedy

$$\frac{\partial A'^i}{\partial x^i} = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \eta^{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = 0.$$

Označme $g = -\frac{\partial A^i}{\partial x^i}$. Potom požadované f dostaneme řešením skalární nehomogenní vlnové rovnice

$$\eta^{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \nabla^2 f = g.$$

3.8. Pohyb nabitě částice v poli rovinné elektromagnetické vlny. Napišme Hamilton-Jacobiho rovnici

$$\eta^{ij} \left(\frac{\partial S}{\partial x^i} + qA_i \right) \left(\frac{\partial S}{\partial x^j} + qA_j \right) = m^2 c^2.$$

Vzhledem k tomu, že se jedná o *rovinnou vlnu* závisí čtyřpotenciál A^i na jedné proměnné, tzv. fázi $\xi = k_i x^i = \frac{\omega}{c} ct - k_x x - k_y y - k_z z$, kde k_i je tzv. *vlnový čtyřvektor*, $k^i k_i = 0$. Použijeme Lorenzovu kalibrační podmínku $\partial A^i/\partial x^i = d/d\xi A^i k_i = 0$ a odtud máme $A^i k_i = 0$. Účinek budeme předpokládat ve tvaru

$$S = -f_i x^i + F(\xi),$$

kde $f_i f^i = m^2 c^2$, tj. $S = -f_i x^i$ je řešení Hamilton-Jacobiho rovnice pro volnou částici, f_i je čtyřhybnost. Po dosazení dostáváme

$$q^2 A_i A^i - 2f^i k_i \frac{dF}{d\xi} - 2q f_i A^i = 0$$

a po integraci

$$F(\xi) = \frac{1}{2f^i k_i} \int d\xi \left(q^2 A^i A_i - 2q f_i A^i \right).$$

Pro účinek tedy dostáváme

$$S = -f_i x^i + \frac{1}{2f^i k_i} \int d\xi \left(q^2 A^i A_i - 2q f_i A^i \right).$$

Zvolme směr šíření rovinné vlny kladný směr osy x , $\xi = ct - x$ a označme $\alpha = f^i k_i = f^0 - f^1$, $\kappa = (0, f_y, f_z)$. Odtud máme

$$(f^0 - f^1)(f^0 + f^1) = m^2 c^2 + \|\kappa\|^2 \quad \text{a tedy} \quad f^0 + f^1 = \frac{m^2 c^2 + \|\kappa\|^2}{\alpha}.$$

Po zpětném dosazení do S máme

$$\kappa \cdot \mathbf{r} - \frac{\alpha}{2}(ct + x) - \frac{m^2 c^2 + \|\kappa\|^2}{2\alpha} \xi + \frac{q}{\alpha} \int \kappa \cdot \mathbf{A} d\xi - \frac{q^2}{2\alpha} \int \|\mathbf{A}\|^2 d\xi.$$

Podle Hamilton-Jacobiho metody musíme položit derivace S podle všech konstant rovny nule, tj. $\partial S / \partial \kappa_x = 0$, $\partial S / \partial \kappa_y = 0$, $\partial S / \partial \alpha = 0$. To po vyřešení vzniklých algebraických rovnic dává

$$\begin{aligned} \frac{ct - x}{2} &= \frac{\xi}{2}, \\ \frac{ct + x}{2} &= \frac{m^2 c^2 + \|\kappa\|^2}{2\alpha^2} \xi - \frac{q}{\alpha^2} \int \kappa \cdot \mathbf{A} d\xi + \frac{q^2}{2\alpha^2} \int \|\mathbf{A}\|^2 d\xi, \\ y &= \frac{\kappa_y}{\alpha} \xi - \frac{q}{\alpha} \int A_y d\xi, \\ z &= \frac{\kappa_z}{\alpha} \xi - \frac{q}{\alpha} \int A_z d\xi. \end{aligned}$$

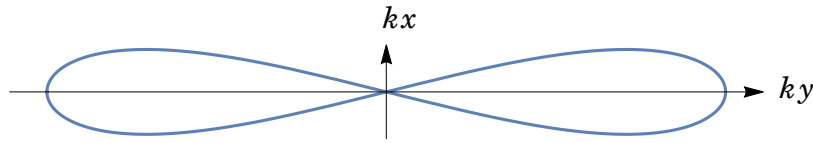
Příklad 20. [15 bodů] Spočítejte pohyb nabitě částice v poli rovinné harmonické lineárně polarizované elektromagnetické vlny.

Úhlovou frekvenci vlny označíme ω , velikost vlnového vektoru k , platí jednoduchá disperzní relace $\omega = ck$, maximální velikost intenzity elektrického pole E_0 . Potom např. $\Phi/c = A_x = A_z = 0$ a $A_y = -E_0/\omega \sin(\omega t - kx)$. Zavedeme bezrozměrnou konstantu

$$\epsilon = \frac{qE_0}{mc\omega} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{qE_0}{mc\omega} \right)^2}}.$$

Potom

$$\begin{aligned} kx &= -\frac{\epsilon^2}{8} \sin 2\eta, \\ ky &= -\epsilon \cos \eta, \\ kz &= 0, \\ \omega t &= \eta - \frac{\epsilon^2}{8} \sin 2\eta. \end{aligned}$$



Obrázek 7: Částice v poli lineárně polarizované rovinné elektromagnetické vlny, $\epsilon = 1$.

Řešení poslední rovnice pro η lze provést numericky např. Newtonovou metodou obdobně jako pro Keplerovu úlohu.⁴

Příklad 21. [15 bodů] Spočítejte pohyb nabitě částice v poli rovinné harmonické obecně elipticky polarizované elektromagnetické vlny.

Obdobně jako v předchozím příkladě máme $\Phi/c = A_x = 0$, dále $A_y = -E_0/\omega \sin(\omega t - kx)$ a $A_z = E_0/\omega \cos(\omega t - kx)$. Potom máme

$$\begin{aligned} kx &= 0, \\ ky &= -\epsilon \cos \omega t, \\ kz &= -\epsilon \sin \omega t, \end{aligned}$$

kde

$$\epsilon = \frac{qE_0}{mc\omega} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{qE_0}{mc\omega}\right)^2}}.$$

Příklad 22. [20 bodů] Magnetická čočka. Najděte ohniskovou vzdálenost čočky pro nabitě částice tvořené homogenním magnetickým polem v okolí optické osy v oblasti délky ℓ . Mimo tuto oblast necht' je pole nulové.

Z Hamilton-Jacobiho rovnice máme pro $S_0 = S - Ht$

$$\|\nabla S_0 - q\mathbf{A}\|^2 = H^2/c^2 - m^2c^2 = p^2 = \text{konst.}$$

Optická osa necht' splývá s osou z , použijeme válcové souřadnice. Vektorový potenciál pro homogenní pole dostaneme jako $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r}$, kde $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ a $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z$. Odtud $\mathbf{A} = \frac{1}{2}B r \mathbf{e}_\varphi$ a máme

$$\left(\frac{\partial S_0}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_0}{\partial z}\right)^2 + \frac{q^2 B^2 r^2}{4} = p^2.$$

⁴Program v Pythonu s animací je k dispozici na <http://physics.muni.cz/~krbek/programy.shtml>.

V blízkosti optické osy je r malé a můžeme S_0 rozvést do řady

$$S_0 = pz + \frac{1}{2}\sigma(z)r^2 + \dots,$$

dosadit do Hamilton-Jacobiho rovnice. Se zanedbáním členů obsahujících r^4 dostaneme

$$p \frac{d\sigma}{dz} + \sigma^2 + \frac{q^2 B^2}{4} = 0.$$

V oblasti 1 před čočkou $z \in (-\infty, 0)$ máme $B = 0$ a po separaci proměnných v rovnici dostaneme

$$\sigma_1(z) = \frac{p}{z - z_1}.$$

V oblasti 2 za čočkou $z \in (\ell, \infty)$ máme obdobně

$$\sigma_2(z) = \frac{p}{z - z_2}.$$

V oblasti 3 uvnitř čočky $z \in (0, \ell)$ dostaneme separací proměnných

$$\sigma_3(z) = -\frac{qB}{2} \operatorname{tg} \left(\frac{qBz}{2p} + C \right).$$

Na hranicích oblasti musí platit $\sigma_3(0) = \sigma_1(0)$ a $\sigma_3(\ell) = \sigma_2(\ell)$. Z první podmínky máme

$$\operatorname{cotg} C = \frac{qB\ell}{2p} \frac{z_1}{\ell}.$$

Označme $\alpha = qB\ell/2p$ a z_1 a z_2 měřme v násobcích ℓ . Potom

$$\operatorname{cotg} C = \alpha z_1$$

a druhá podmínka po úpravě dává

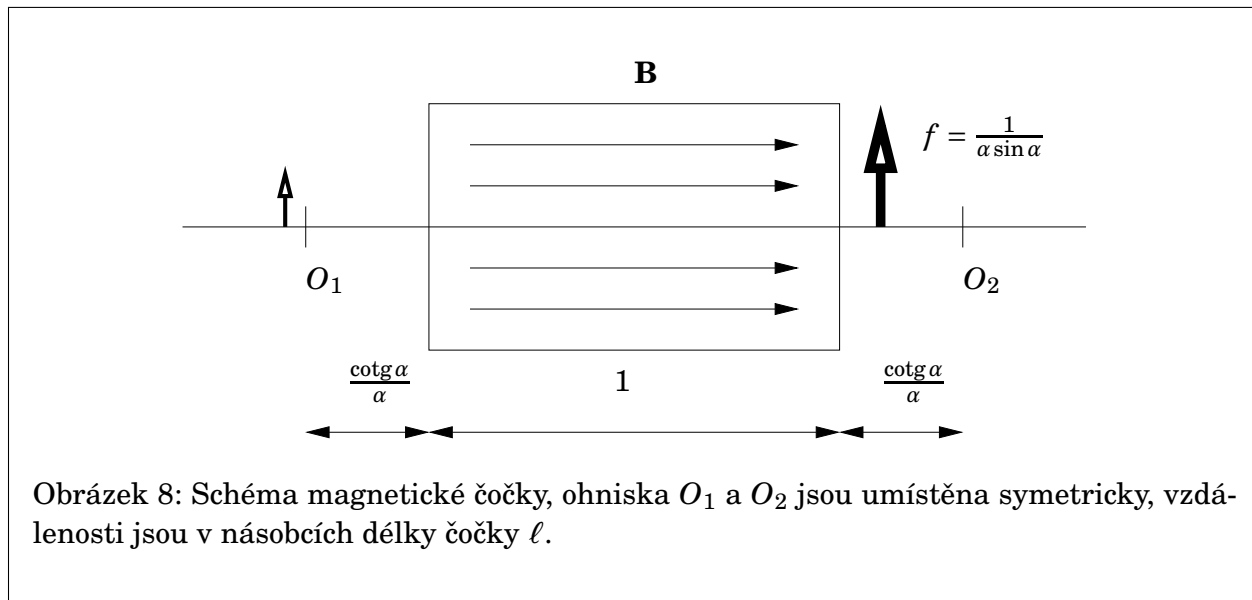
$$\left(z_1 + \frac{\operatorname{cotg} \alpha}{\alpha} \right) \left(z_2 - \frac{\operatorname{cotg} \alpha}{\alpha} - 1 \right) = -\frac{1}{\alpha^2 \sin^2 \alpha}.$$

Odtud vidíme, že hlavní ohniska jsou na optické ose ve vzdálenostech

$$\frac{\ell \operatorname{cotg} \alpha}{\alpha}$$

od okrajů oblasti s nenulovým magnetickým polem a pro hlavní ohniskovou vzdálenost čočky dostaneme

$$f = \frac{\ell}{\alpha \sin \alpha} = \frac{2p}{qB \sin \frac{qB\ell}{2p}}.$$



4. Rovnice elektromagnetického pole

V předchozí části jsme elektromagnetické pole považovali za dané, pole ovlivňovalo pohyby nábojů, ale pohybující se náboje nevytvářely pole. Nyní budeme uvažovat zcela obecně.

4.1. Účinek pro elektromagnetické pole. Účinek pro elektromagnetické pole musíme získat integrací absolutního invariantu elektromagnetického pole. Požadujeme, aby vzniklé rovnice byly lineární a pro elektromagnetické pole tím pádem platil princip superpozice. Lagrangeova hustota pro elektromagnetické pole musí být tím pádem kvadratickou funkcí derivací čtyřpotenciálů.

Jediný absolutní kvadratický invariant pro elektromagnetické pole je $F_{ij}F^{ij}$, proto Lagrangeova hustota elektromagnetického pole musí být jeho násobkem a účinek v jednotkách SI je

$$S_{\text{pole}} = -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \iiint \int_{\Omega} F_{ij} F^{ij} d\Omega.$$

kde Ω je oblast v časoprostoru, $d\Omega = c dt dx dy dz$ je 4-objemový element v časoprostoru.

Příklad 23. [10 bodů] Zjistěte, jaké jednotky a význam má konstanta $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$, jaké jednotky má F_{ij} a proč musí být z rozměrových důvodů před integrálem definujícím účinek právě daná rozměrná konstanta. Zjistěte velikost Z_0 . Nově bude elementární elektrický náboj v SI definován přesně a veličina Z_0 naopak v budoucnosti bude moci být měřením zpřes-

ňována. □

4.2. Interakce pole a pohybujících se nábojů. Z předchozí části již víme, že část účinku popisující interakci pole a náboje je

$$S_{\text{interakce}} = -q \int_1^2 A_i dx^i.$$

Pro více nábojů dostaneme součet

$$S_{\text{interakce}} = -\sum_J q_J \int_1^2 A_i dx^i,$$

pro spojitě rozložené náboje tento součet nahradíme objemovým integrálem přes hustotu náboje ρ . Máme $dq = \rho dV$ a odtud

$$dq dx^i = \rho dV dx^i = \rho \frac{dx^i}{cdt} c dt dV = \frac{\rho}{c} \frac{dx^i}{dt} d\Omega.$$

Potom dostaneme

$$S_{\text{interakce}} = -\frac{1}{c} \iiint_{\Omega} A_i j^i d\Omega,$$

kde $j^i = \rho dx^i/dt = (c\rho, \rho\mathbf{v})$ je čtyřvektor proudu.

Příklad 24. [5 bodů] V nerelativistické aproximaci ⁵ využijte princip superpozice k výpočtu celkové síly a celkového momentu síly působícího na smyčku ve tvaru kružnice o poloměru R protékanou proudem I umístěnou v homogenním magnetickém poli.

Víme již, že nezměníme pohybové rovnice, nahradíme-li pro libovolné hladké f čtyřpotenciály $A_i \rightarrow A_i + \partial f/\partial x^i$. Dostaneme

$$S_{\text{interakce}} = -\frac{1}{c} \iiint_{\Omega} \left(A_i + \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) j^i d\Omega = -\frac{1}{c} \iiint_{\Omega} A_i j^i d\Omega - \frac{1}{c} \iiint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x^i} j^i d\Omega.$$

Druhý sčítanec upravíme pomocí Gaussovy věty na

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x^i} j^i d\Omega = \iiint_{\partial(\Omega)} f j^i \Omega_i - \iiint_{\Omega} \frac{\partial j^i}{\partial x^i} f d\Omega.$$

Trojný integrál přes hranici oblasti Ω pro dostatečně velkou oblast Ω zahrnující všechny náboje vypadne, druhá část tedy musí vypadnout pro libovolné f , proto $\partial j^i/\partial x^i = 0$, což po dosazení dává

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho\mathbf{v}) = 0,$$

⁵Jinak to ani nedává smysl, protože neexistují relativistická tuhá tělesa. Např. pokud na jeden konec tuhé tyče, která je v dané inerciální vztažné soustavě v klidu, začneme působit silou \mathbf{F} , začne druhý konec tyče okamžitě zrychlovat. To je v rozporu s konečnou rychlostí šíření signálu.

rovnici kontinuity pro nábojovou hustotu.

Příklad 25. [5 bodů] Odvoďte rovnici kontinuity pro nábojovou hustotu v trojrozměrném integrálním tvaru.

4.3. Rovnice elektromagnetického pole. Uvažme nejprve rovnice plynoucí z definice tenzoru elektromagnetického pole $F_{ij} = \partial A_j / \partial x^i - \partial A_i / \partial x^j$. Spočtěme

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k} &= \frac{\partial^2 A_j}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 A_i}{\partial x^j \partial x^k}, \\ \frac{\partial F_{jk}}{\partial x^i} &= \frac{\partial^2 A_k}{\partial x^j \partial x^i} - \frac{\partial^2 A_j}{\partial x^k \partial x^i}, \\ \frac{\partial F_{ki}}{\partial x^j} &= \frac{\partial^2 A_i}{\partial x^k \partial x^j} - \frac{\partial^2 A_k}{\partial x^i \partial x^j}.\end{aligned}$$

Sečtením těchto tří rovnic a využitím záměnnosti druhých parciálních derivací čtyřpotenciálu dostaneme

$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{ki}}{\partial x^j} = 0.$$

Rozepsáním postupně pro $ijk = 123, 023, 031$ a 012 získáme

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_{12}}{\partial x^3} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x^2} &= -\frac{\partial B_z}{\partial z} - \frac{\partial B_x}{\partial x} - \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial F_{02}}{\partial x^3} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x^0} + \frac{\partial F_{30}}{\partial x^2} &= \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{B_x}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial F_{03}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x^0} + \frac{\partial F_{10}}{\partial x^3} &= \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{B_y}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial F_{01}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x^0} + \frac{\partial F_{20}}{\partial x^1} &= \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{1}{c} \frac{B_z}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0.\end{aligned}$$

Pomocí vektorového diferenciálního operátoru ∇ můžeme pro první rovnici a další tři rovnice společně psát

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0.$$

Dále budeme uvažovat princip stacionárního účinku pro rozložení nábojů předepsané zadaným čtyřproudem j^i . Pro účinek získáme

$$S = S_{\text{částice}} + S_{\text{interakce}} + S_{\text{pole}} = -\sum_J m_J c \int_J ds - \frac{1}{c} \iiint_{\Omega} A_i j^i d\Omega - \frac{1}{4Z_0} \iiint_{\Omega} F_{ij} F^{ij} d\Omega,$$

přičemž první sčítanec neobsahující A_i je při zadaných světočarách částic a tím pádem zadaném čtyřproudu j^i konstantní. Spočteme, kdy bude účinek stacionární.

$$\delta S = - \int_{\Omega} \left(\frac{1}{c} j^i \delta A_i + \frac{1}{2Z_0} F^{ik} \delta F_{ik} \right) d\Omega = 0.$$

Dále máme

$$F^{ik} \delta F_{ik} = F^{ik} \left(\frac{\partial \delta A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \delta A_i}{\partial x^k} \right) = 2F^{ik} \frac{\partial \delta A_k}{\partial x^i}$$

a po dosazení a využití Gaussovy věty máme

$$\begin{aligned} \delta S &= - \int_{\Omega} \left(\frac{1}{c} j^i \delta A_i + \frac{1}{Z_0} F^{ik} \frac{\partial \delta A_k}{\partial x^i} \right) d\Omega = - \int_{\Omega} \left(\frac{1}{c} j^i \delta A_i - \frac{1}{Z_0} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^i} \delta A_k \right) d\Omega - \\ &\quad - \frac{1}{Z_0} \int_{\partial(\Omega)} F^{ik} \delta A_k d\Omega_i = - \int_{\Omega} \left(\frac{1}{c} j^k - \frac{1}{Z_0} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^i} \right) \delta A_k d\Omega - \frac{1}{Z_0} \int_{\partial(\Omega)} F^{ik} \delta A_k d\Omega_i \end{aligned}$$

Na hranici oblasti Ω jsou δA_k , popř. F^{ik} nulová a pro jinak libovolná δA_i získáme

$$\frac{1}{c} j^k - \frac{1}{Z_0} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^i} = 0.$$

Připomeňme si, že $j^i = (c\rho, \mathbf{j})$ a

$$F_{ik} \sim \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad F^{ik} \sim \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Tyto čtyři rovnice můžeme napsat jako jednu skalární a jednu vektorovou rovnici

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j}.$$

Tento soubor rovnic je znám jako *Maxwellovy rovnice* ve vakuu.

4.4. Elektromagnetické vlny ve vakuu. Pokud nejsou přítomny žádné náboje, získáme rovnici

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^i} = \eta^{ij} \eta^{k\ell} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial A_j}{\partial x^\ell} - \frac{\partial A_\ell}{\partial x^j} \right) = \eta^{k\ell} \frac{\partial^2 A^i}{\partial x^i \partial x^\ell} - \eta^{ij} \frac{\partial^2 A^k}{\partial x^i \partial x^j} = 0.$$

První sčítanec vypadne využitím Lorenzovy kalibrační podmínky $\partial A^i / \partial x^i = 0$ a získáme vlnovou rovnici pro čtyřpotenciál

$$\eta^{ij} \frac{\partial^2 A^k}{\partial x^i \partial x^j} = 0.$$

V trojrozměrném značení to můžeme zapsat jako

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \Phi = 0, \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} = 0,$$

tj. Lorenzovu kalibrační podmínku a vlnovou rovnici pro skalární a vektorový potenciál.

Příklad 26. [10 bodů] Dokažte, že i pro kartézské složky F_{ik} (tedy \mathbf{E} a \mathbf{B}) platí ve vakuu za nepřítomnosti nábojů vlnová rovnice. \square

4.5. Monochromatická rovinná elektromagnetická vlna ve vakuu. Řešení vlnové rovnice pro čtyřpotenciál můžeme psát

$$A^j = \text{Re} \left[a^j \exp(i k_\ell x^\ell) \right],$$

kde $a^j \in \mathbb{C}$, $k_j k^j = 0$ a $k_j a^j = 0$ v Lorenzově kalibraci. Zvolíme-li navíc pro jednu vztaznou soustavu $\Phi = 0$ a $\mathbf{k} = k \mathbf{e}_x$, potom z $\mathbf{A} \perp \mathbf{k}$ máme

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= a_y \cos(\omega t - kx + \varphi) \mathbf{e}_y + a_z \sin(\omega t - kx + \varphi) \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{E} &= a_y \omega \sin(\omega t - kx + \varphi) \mathbf{e}_y - a_z \omega \cos(\omega t - kx + \varphi) \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{B} &= a_z k \cos(\omega t - kx + \varphi) \mathbf{e}_y + a_y k \sin(\omega t - kx + \varphi) \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

4.6. Tenzor energie – hybnosti. Pomocí teoremu Nötherové lze definovat tzv. *tenzor energie – hybnosti*

$$T^{ij} = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{1}{4} \eta^{ij} F_{k\ell} F^{k\ell} - \eta_{k\ell} F^{ik} F^{j\ell} \right).$$

Platí pro něj

$$\frac{\partial T^{ij}}{\partial x^i} = 0, \quad T^{ij} = T^{ji}, \quad T^i_i = 0$$

a tyto vlastnosti jej určují jednoznačně. Po rozepsání dostáváme v trojrozměrném značení

$$T^{ij} \sim \begin{pmatrix} W & \frac{1}{c} \mathbf{S}^t \\ \frac{1}{c} \mathbf{S} & -\sigma \end{pmatrix},$$

kde

$$W = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 \|\mathbf{E}\|^2 + \frac{1}{\mu_0} \|\mathbf{B}\|^2 \right), \quad \mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}, \quad \sigma_{ab} = \epsilon_0 E_a E_b + \frac{1}{\mu_0} B_a B_b - W \delta_{ab},$$

kde $a, b \in \{x, y, z\}$. Veličina W je hustota energie elektromagnetického pole, \mathbf{S} je tzv. *Poyntingův vektor* a tenzor σ je tzv. *Maxwellův tenzor napětí*.

Význam tenzoru energie – hybnosti elektromagnetického pole je následovný: uvažme oblast Ω časoprostoru a její hranici $\partial(\Omega)$. Potom z Gaussovy věty máme

$$\int_{\Omega} \frac{\partial F^{ij}}{\partial x^i} d\Omega = \int_{\partial(\Omega)} F^{ij} d\Omega_i = 0$$

Veličina $F^{ij} d\Omega_i$ je tedy tok j -té složky čtyřhybnosti elektromagnetického pole P^j infinitezimální nadplochou danou rovnicí $x^i = \text{konst}$.

Uvážíme-li nadplochu N , která není hranicí nějaké čtyřrozměrné oblasti, integrál bude nenulový, tedy

$$P^j = \int_N T^{ij} d\Omega_i.$$

Schematicky můžeme význam jednotlivých složek tenzoru energie – hybnosti vidět v diagramu níže.

W	$\frac{1}{c}S_x$	$\frac{1}{c}S_y$	$\frac{1}{c}S_z$	hustota energie
$\frac{1}{c}S_x$	$-\sigma_{xx}$	$-\sigma_{xy}$	$-\sigma_{xz}$	hustota hybnosti
$\frac{1}{c}S_y$	$-\sigma_{xy}$	$-\sigma_{yy}$	$-\sigma_{yz}$	tlak záření
$\frac{1}{c}S_z$	$-\sigma_{xz}$	$-\sigma_{yz}$	$-\sigma_{zz}$	napětí ve smyku

Příklad 27. [15 bodů] Spočítejte tenzor energie – hybnosti pro rovinnou monochromatickou pravotočivě kruhově polarizovanou elektromagnetickou vlnu. □

Příklad 28. [15 bodů] Spočítejte tenzor energie – hybnosti pro rovinnou monochromatickou elektromagnetickou vlnu, kde $\Phi = 0$ a

$$\mathbf{A} = -\frac{E_0}{\omega kr} \sin(\omega t - kz) \mathbf{e}_\varphi$$

ve válcových souřadnicích (r, φ, z) .

5. Elektrostatika a magnetostatika

5.1. Statické Maxwellovy rovnice. Předpokládejme, že v mikroskopických Maxwellových rovnicích elektrická intenzita \mathbf{E} ani magnetická indukce \mathbf{B} nezávisí na čase. Předpokládejme rovněž, že hustota elektrického náboje ρ ani hustota toku elektrického náboje \mathbf{j} nezávisí na čase. Potom Maxwellovy rovnice nabudou tvaru

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}.$$

Povšimneme si, že rovnice pro \mathbf{E} a \mathbf{B} jsou na sobě nezávislé a můžeme je studovat odděleně. Zřejmé je to také po rozepsání variačního principu, jehož jsou výše uvedené rovnice důsledkem

$$S = \int_{t_1}^{t_2} c dt \int_V dV \left[-\frac{\Phi}{c} \rho + \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{j}}{c} - \frac{1}{2Z_0} \left(\|\mathbf{B}\|^2 - \frac{\|\mathbf{E}\|^2}{c^2} \right) \right],$$

kde v důsledku nezávislosti na čase je $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ (a $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$) a první integrál vzhledem k t můžeme tedy spočítat. Máme

$$S = (t_2 - t_1) \left[\int_V dV \left(-\Phi\rho + \frac{\epsilon_0}{2} \|\nabla\Phi\|^2 \right) + \int_V dV \left(\mathbf{A} \cdot \mathbf{j} - \frac{1}{2\mu_0} \|\nabla \times \mathbf{A}\|^2 \right) \right].$$

Rovnici pro elektrostatické pole

$$-\nabla \cdot \nabla\Phi = -\Delta\Phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

dostaneme jako stacionární bod funkcionálu daného prvním sčítancem, který až na násobek je

$$\int_V dV \left(-\Phi\rho + \frac{\epsilon_0}{2} \|\nabla\Phi\|^2 \right),$$

rovnici pro magnetostatické pole

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{j}$$

dostaneme jako stacionární body funkcionálu daného druhým sčítancem, který až na násobek je

$$\int_V dV \left(\mathbf{A} \cdot \mathbf{j} - \frac{1}{2\mu_0} \|\nabla \times \mathbf{A}\|^2 \right).$$

Příklad 29. [10+15 bodů] Ověřte, že rovnice pro elektrostatické a magnetostatické pole dostaneme z prvního a druhého sčítance přímým výpočtem pomocí Euler-Lagrangových rovnic pro Lagrangeovy hustoty dané patřičnými integrandy. \square

Rovnici pro magnetostatické pole můžeme dále upravit protože

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f$$

nezmění \mathbf{B} a vhodnou volbou f

$$\Delta f = -\nabla \cdot \mathbf{A}$$

můžeme docílit $\nabla \cdot \mathbf{A}' = 0$. (V dalším se řešením této rovnice budeme zabývat.) Proto je

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A} = -\Delta\mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j},$$

přičemž již nepíšeme dále u vektorového potenciálu $'$.

5.2. Základní úloha elektrostatiky. Základní úlohou elektrostatiky je řešení rovnice

$$\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

v oblasti $V \subset \mathbb{R}^3$ doplněné okrajovými podmínkami na hranici této oblasti na elektrostatický potenciál Φ nebo jeho derivaci ve směru vnější normály, tj. normálovou složku intenzity elektrostatického pole. Vezměme $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \partial(V)$

$$\Phi|_A = u, \quad -\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\Big|_B = E_\nu.$$

Zejména je na uzemněném vodiči $u = 0$ a pokud jsou na hranici pevně umístěny povrchové náboje s plošnou hustotou σ , je $E_\nu = \sigma/\epsilon_0$.

V dalším si ukážeme, že základní úloha elektrostatiky připouští nejvýše jedno řešení. Potom si ukážeme některé metody, jak takové řešení získat.

Předpokládejme tedy sporem, že máme dvě řešení Φ_1 a Φ_2 a uvažujme jejich rozdíl $\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$. Tento rozdíl splňuje homogenní rovnici $\Delta\Phi = 0$ s identicky nulovými okrajovými podmínkami

$$\Phi|_A = 0, \quad -\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\Big|_B = 0.$$

Z Gaussovy věty

$$\iiint_V dV \nabla \cdot \mathbf{X} = \iint_{\partial(V)} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{X}$$

dosazením za $\mathbf{X} = \Phi\nabla\Phi$ dostaneme

$$\iiint_V dV \|\nabla\Phi\|^2 + \iiint_V dV \Phi\Delta\Phi = \iint_{\partial(V)} \Phi d\mathbf{S} \cdot \nabla\Phi.$$

Pravá strana vypadne kvůli okrajovým podmínkám, druhý sčítanec na levé straně vypadne kvůli splnění rovnice. Dostáváme

$$\iiint_V dV \|\nabla\Phi\|^2 = 0,$$

což je možné jen tehdy, pokud $\Phi = \text{konst.}$ Tato konstanta je nulová, pokud je $A \neq \emptyset$. Všimněme si, že vzniklý výraz na levé straně je až na multiplikatívni konstantu shodný s účinkem (pro $\rho = 0$). \square

Nalezneme-li tedy libovolnou metodou řešení, víme, že je jediné možné.

5.3. Některé metody řešení úloh elektrostatiky. Nyní již můžeme ukázat některé metody, které se při řešení problémů v elektrostatice můžeme využít.

Příklad 30. [2 body] Spočítejte elektrostatický potenciál a intenzitu elektrického pole mezi dvěma rovnoběžnými nekonečnými rovinami ve vzdálenosti ℓ , z nichž jedna je udržovaná na potenciálu $\Phi_1 = 0$ a druhá na potenciálu Φ_2 .

Souřadnicovou rovinu xy zvolíme jako první rovinu, druhá rovina bude mít rovnici $z = \ell$. Musíme vyřešit Laplaceovu rovnici

$$\Delta\Phi = 0, \quad \Phi|_{z=0} = \Phi_1, \quad \Phi|_{z=\ell} = \Phi_2.$$

Vzhledem k symetrii úlohy vůči posunutí v rovině xy je $\Phi = \Phi(z)$ a $\Delta\Phi = d^2\Phi/dz^2 = 0$, což po integraci dává $\Phi(z) = Az + B$ a po dosazení okrajových podmínek dostaneme

$$\Phi(z) = \Phi_2 \frac{z}{\ell} + \Phi_1 \frac{\ell - z}{\ell}.$$

Intenzita elektrického pole je konstantní a rovná $\mathbf{E} = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\ell} \mathbf{e}_z$. □

Příklad 31. [5 bodů] Určete elektrostatický potenciál mezi dvěma souosými válci o poloměrech $R_1 < R_2$ udržovaných na konstantním potenciálu U_1 resp. U_2 .

$$[\Phi(r) = \frac{U_2 - U_1}{\ln R_2 / R_1} \ln r + \frac{U_2 \ln R_1 - U_1 \ln R_2}{\ln R_2 / R_1}]$$

Příklad 32. [10 bodů] Metoda obrazů. Vypočítejte elektrostatický potenciál $\Phi(\mathbf{r})$ v bodě \mathbf{r} a intenzitu elektrostatického pole $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ v bodě \mathbf{r} pro soustavu složenou z bodového náboje q umístěného ve vzdálenosti R od středu dokonale vodivé uzemněné sféry o poloměru a . Dále vypočítejte indukovanou plošnou hustotu náboje na sféře a sílu, kterou působí sféra na náboj. Uvažte jak situaci, kdy je náboj umístěn uvnitř sféry ($R < a$), tak i situaci, kdy je náboj umístěn vně sféry ($R > a$).

Pro konkrétnost řešme situaci, kdy je náboj umístěn vně sféry. Elektrostatický potenciál i intenzita elektrostatického pole uvnitř sféry jsou potom nulové. Počátek soustavy souřadnic umístíme do středu sféry. Náboj q má polohu $R\mathbf{N}$, $\|\mathbf{N}\| = 1$. Body na povrchu sféry jsou dány jako $a\mathbf{n}$, $\|\mathbf{n}\| = 1$. Elektrostatický potenciál na povrchu sféry je roven nule, $\Phi(a\mathbf{n}) = 0$. Tohoto můžeme docílit umístěním druhého náboje (obrazu) q' dovnitř sféry do polohy $R'\mathbf{N}'$. Pro body vně sféry bude platit

$$4\pi\epsilon_0\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{\|\mathbf{r} - R\mathbf{N}\|} + \frac{q'}{\|\mathbf{r} - R'\mathbf{N}'\|}.$$

Zejména na povrchu sféry (tj. pro všechna \mathbf{n}) musí platit

$$0 = 4\pi\epsilon_0\Phi(a\mathbf{n}) = \frac{q}{\|a\mathbf{n} - R\mathbf{N}\|} + \frac{q'}{\|a\mathbf{n} - R'\mathbf{N}'\|}.$$

Odtud úpravou získáme

$$q^2 [a^2 + (R')^2 - 2aR'\mathbf{n} \cdot \mathbf{N}'] = (q')^2 [a^2 + R^2 - 2aR\mathbf{n} \cdot \mathbf{N}]$$

$$q^2 a^2 \left[1 + \left(\frac{R'}{a}\right)^2 - 2\frac{R'}{a}\mathbf{n} \cdot \mathbf{N}' \right] = (q')^2 R^2 \left[\left(\frac{a}{R}\right)^2 + 1 - 2\frac{a}{R}\mathbf{n} \cdot \mathbf{N} \right]$$

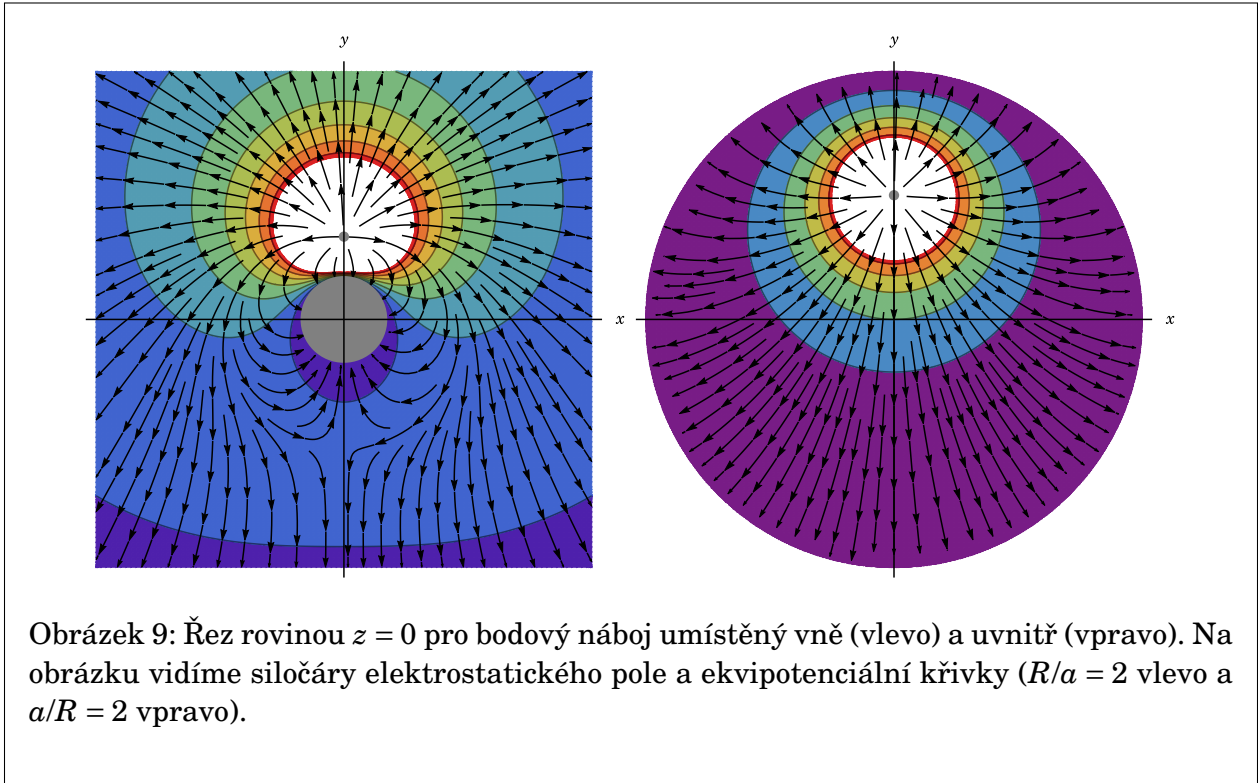
Odtud srovnáním dostaneme

$$q' = -q\frac{a}{R}, \quad R' = \frac{a^2}{R}, \quad \mathbf{N}' = \mathbf{N}.$$

Pro elektrostatický potenciál tedy dostaneme s $\mathbf{r} = r\mathbf{n}$

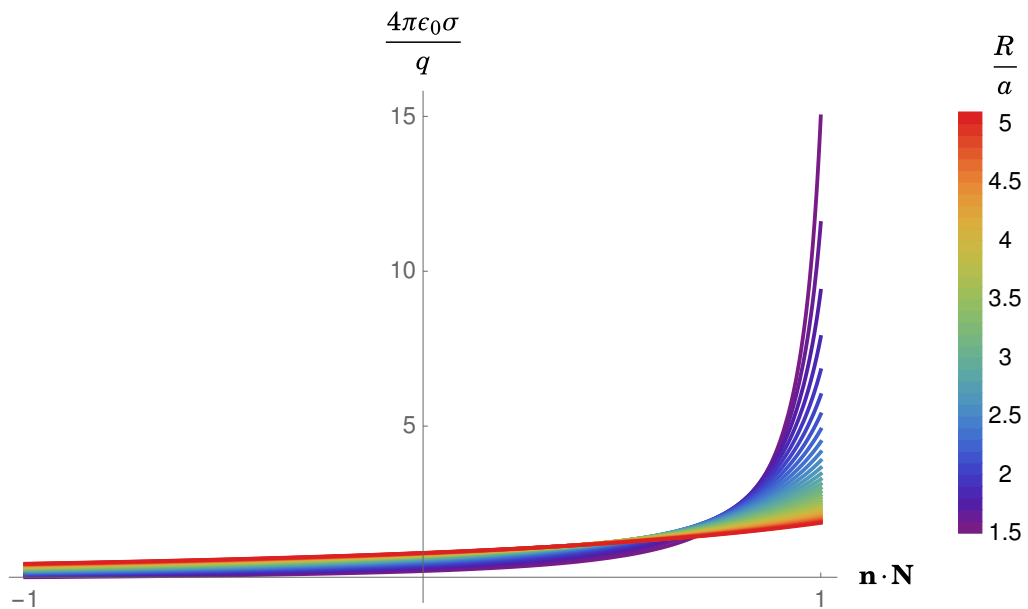
$$4\pi\epsilon_0\Phi(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0 & \text{pro } r < a, \\ \frac{q}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\mathbf{n} \cdot \mathbf{N}}} - \frac{qa}{R\sqrt{r^2 + a^4/R^2 - 2a^2r\mathbf{n} \cdot \mathbf{N}/R}} & \text{pro } r > a. \end{cases}$$

Elektrostatickou intenzitu získáme jako $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$. Podobně budeme postupovat, je-li náboj umístěn uvnitř sféry.



Plošnou hustotu σ náboje indukovaného na povrchu sféry získáme jako normálovou složku $\epsilon_0 \mathbf{E}$ na povrchu sféry takto

$$\epsilon_0 \sigma(a\mathbf{n}) = -\frac{\partial \Phi}{\partial r}(a\mathbf{n}) = \frac{q}{4\pi a^2} \frac{a}{R} \frac{1 - \frac{a^2}{R^2}}{\left(1 + \frac{a^2}{R^2} - 2\frac{a}{R} \mathbf{n} \cdot \mathbf{N}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$



Obrázek 10: Plošná hustota náboje indukovaného na sféře v závislosti na $\mathbf{n} \cdot \mathbf{N}$ pro různé poměry R/a (odlišeno barevně).

Sílu, kterou náboj působí na kouli (o také koule na náboj) vypočítáme nejrychleji tak, že

budeme uvažovat silové působení nábojů q a q' . Vzdálenost nábojů je $R - R'$ a máme tedy

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 a}{R^3} \frac{\mathbf{N}}{\left(1 - \frac{a^2}{R^2}\right)^2}.$$

Bylo by zajímavé, vyšetřit pohyb náboje a sféry, nebudou-li působit žádné další síly kromě síly elektrostatické, příliš realistické to není, protože zrychlující náboje vyzařují elektromagnetické vlny. \square

K řešení nehomogenní rovnice $-\epsilon_0 \Delta \Phi = \rho$ s patřičnými okrajovými podmínkami využijeme toho, že operátor Δ je lineární. Spočteme napřed, jaký elektrostatický potenciál získáme od bodového náboje. Libovolné složitější rozložení náboje můžeme potom vždy dostat jako lineární kombinaci bodových nábojů (různých velikostí).

Umístěme bodový náboj o velikosti q do počátku soustavy souřadnic. Elektrostatický potenciál potom bude kvůli symetrii úlohy záviset pouze na vzdálenosti r od tohoto počátku.

Příklad 33. Zapišme Laplaceův operátor Δ , pokud funkce $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, na kterou působí, závisí pouze na vzdálenosti od počátku soustavy souřadnic $r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.

Máme tedy $\Phi(r(x_1, \dots, x_n))$. Provedme potřebné derivace s využitím řetězového pravidla pro derivaci složené funkce

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} &= \frac{d\Phi}{dr} \frac{\partial r}{\partial x_j} = \frac{d\Phi}{dr} \frac{x_j}{r} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j^2} &= \frac{d^2 \Phi}{dr^2} \frac{x_j^2}{r^2} + \frac{d\Phi}{dr} \frac{r^2 - x_j^2}{r^3} \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j^2} &= \frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \frac{n-1}{r} \frac{d\Phi}{dr} = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{d}{dr} \left(r^{n-1} \frac{d\Phi}{dr} \right). \end{aligned}$$

Pro $r \neq 0$ máme dále

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^{n-1}} \frac{d}{dr} \left(r^{n-1} \frac{d\Phi}{dr} \right) &= 0 \\ \frac{d}{dr} \left(r^{n-1} \frac{d\Phi}{dr} \right) &= 0 \\ r^{n-1} \frac{d\Phi}{dr} &= C = \text{konst.} \\ \Phi(r) &= \begin{cases} C \ln r + \text{konst.} & n = 2 \\ -\frac{C}{(n-2)r^{n-2}} + \text{konst.} & n > 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Zbývá určit Φ pro $r = 0$ a konstantu C . Pro intenzitu elektrostatického pole dostáváme

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi = -\frac{C}{r^{n-1}} \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{r} \mathbf{e}_j = -\frac{C}{r^{n-1}} \mathbf{e}_r.$$

Z Gaussovy věty aplikované na kouli B o poloměru $r > 0$ se středem v počátku a první Maxwellovu rovnici máme

$$\int_B dV \nabla \cdot \mathbf{E} = \oint_{\partial(B)} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{E} = \int_B dV \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Odtud již máme

$$-S_{n-1} r^{n-1} \frac{C}{r^{n-1}} = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad C = -\frac{q}{S_{n-1} \epsilon_0},$$

kde S_{n-1} je (nad)povrch jednotkové sféry v n -rozměrném prostoru.

n	S_{n-1}
2	2π
3	4π
4	$2\pi^2$.

Libovolnou hustotu náboje v prostoru můžeme zapsat pomocí Diracovy δ -distribuce následovně

$$\rho(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Pro bodový náboj $\rho(\mathbf{r}')$ umístěný v bodě \mathbf{r}' je elektrostatický potenciál roven

$$\Phi(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}.$$

Potenciál od celkového rozložení náboje je tedy

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}.$$

Příklad 34. [5 bodů] Spočítejte elektrostatický potenciál pro tenký drát ve tvaru kružnice o poloměru a s homogenním rozložením náboje. Celkový náboj v drátu je q .

Drát umístíme do roviny xy , jeho střed do počátku soustavy souřadnic. Potom $\mathbf{r}' = a \cos \varphi \mathbf{e}_x + a \sin \varphi \mathbf{e}_y$ a $\rho(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' = q/2\pi a \delta(a - r') \delta(z') r' dr' d\varphi dz'$. Potom pro elektrostatický potenciál do-

staneme

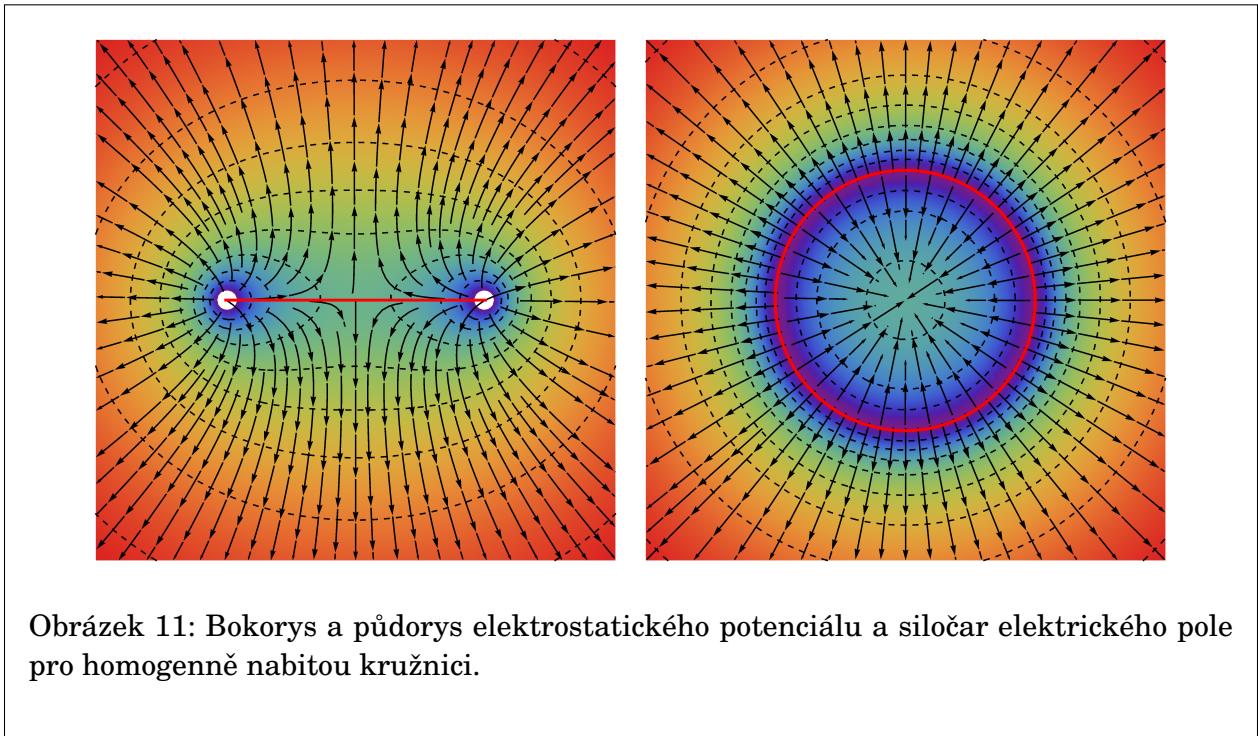
$$\begin{aligned}\Phi(r, \varphi, z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2\pi a} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi' \int_0^{\infty} dr' \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{\delta(a-r')\delta(z')}{\sqrt{(r\cos\varphi - r'\cos\varphi')^2 + (r\sin\varphi - r'\sin\varphi')^2 + (z-z')^2}} \\ &= \frac{q}{8\pi^2\epsilon_0} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi'}{\sqrt{(r\cos\varphi - a\cos\varphi')^2 + (r\sin\varphi - a\sin\varphi')^2 + z^2}} \\ &= \frac{q}{8\pi^2\epsilon_0} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi'}{\sqrt{r^2 + a^2 + z^2 - 2ra\cos(\varphi - \varphi')}}.\end{aligned}$$

Vzniklý integrál lze převést na úplný eliptický integrál prvního druhu

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}},$$

celkový výsledek je

$$\Phi(r, z) = \frac{q}{2\pi^2\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(r+a)^2 + z^2}} K\left(\frac{4ar}{(r+a)^2 + z^2}\right).$$



Příklad 35. [10 bodů] Spočítejte elektrostatický potenciál a intenzitu elektrického pole pro homogenně nabitou tyč délky ℓ o lineární nábojové hustotě λ .

Příklad 36. [13 bodů] Spočítejte elektrostatický potenciál a intenzitu elektrického pole pro vodivou kouli o poloměru a s celkovým nábojem q umístěnou v homogenním elektrickém poli o intenzitě \mathbf{E}_0 . [<http://physics.muni.cz/~krbek/nabitasferavhomogennimelpoli.shtml>]

Příklad 37. [15 bodů] Spočítejte elektrostatický potenciál vně a uvnitř dvou polosfér přiložených k sobě, ale oddělených malou mezerou. Poloměr vzniklé sféry je a , potenciál na horní polosféře necht' má konstantní hodnotu U_0 a na dolní sféře necht' má hodnotu $-U_0$.

Vně i uvnitř sféry musí elektrostatický potenciál Φ splňovat Laplaceovu rovnici. Výhodné bude počítat ve sférických souřadnicích, střed sféry umístíme do počátku soustavy souřadnic a rovinou oddělující obě polosféry necht' je rovina xy . Vzhledem k symetrii vůči otáčení v rovině xy nebude Φ záviset na sférické souřadnici φ . Laplaceův operátor ve sférických souřadnicích je v tomto případě roven

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \right)$$

Položme jej roven nule a řešme vzniklou úlohu separací proměnných, tj. $\Phi(r, \theta) = A(r)B(\theta)$. Dostaneme

$$\frac{1}{A} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dA}{dr} \right) = - \frac{1}{B \sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{dB}{d\theta} \right) = \lambda = \text{konst.}$$

Vyřešme napřed úhlovou část rovnice a substituujme $z = \cos\theta$. Potom $d/dz = 1/\sin\theta d/d\theta$ a získáme rovnici

$$\frac{d}{dz} \left[(1-z^2) \frac{dB}{dz} \right] + \lambda B = 0.$$

Řešení předpokládejme ve tvaru mocninné řady

$$B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

a dosad'me jej do rovnice. Dostaneme rekurentní vztah pro koeficienty mocninné řady

$$b_{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} [n(n+1) - \lambda] b_n.$$

Všimněme si napřed, že můžeme od sebe oddělit sudá a lichá řešení, protože sudé koeficienty vzniklé řady nesouvisí s lichými a naopak. Aby řada byla konvergentní i pro $z = \pm 1$ (to odpovídá směru kladné resp. záporné osy z), musí mít jen konečný počet členů a musí se tedy jednat o polynom. Proto musí být $\lambda = \ell(\ell+1)$. Vhodně normovaná řešení rovnice nazýváme *Legendreovy polynomy* a značíme $P_\ell(z)$. Splňují diferenciální rovnici

$$\frac{d}{dz} \left[(1-z^2) \frac{dP_\ell}{dz} \right] + \ell(\ell+1)P_\ell = 0.$$

Odvodíme nyní některé vlastnosti Legendreových polynomů.

Rodriguesův vzorec. Vezměme funkci $w_\ell(z) = (z^2 - 1)^\ell$, $\ell \in \mathbb{N}$ a derivujme ji a výsledek vynásobme $(z^2 - 1)$. Dostaneme

$$(z^2 - 1) \frac{dw_\ell}{dz} = 2\ell z(z^2 - 1)^\ell = 2\ell z w_\ell, \quad \text{odtud} \quad (1 - z^2) \frac{dw_\ell}{dz} + 2\ell z w_\ell = 0.$$

Vzniklou rovnici ještě jednou derivujme

$$(1 - z^2) \frac{d^2 w_\ell}{dz^2} + 2(\ell - 1)z \frac{dw_\ell}{dz} + 2\ell w_\ell = 0.$$

Tuto rovnici derivujme ještě ℓ -krát pomocí identity

$$\frac{d^\ell}{dz^\ell}(fg) = \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} \frac{d^k f}{dz^k} \frac{d^{\ell-k} g}{dz^{\ell-k}}.$$

Dostaneme

$$\frac{d}{dz} \left[(1 - z^2) \frac{d^{\ell+1} w_\ell}{dz^{\ell+1}} \right] + \ell(\ell + 1) \frac{d^\ell w_\ell}{dz^\ell} = 0.$$

Proto

$$P_\ell(z) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dz^\ell} (z^2 - 1)^\ell,$$

kde normovací faktor je zvolen tak, aby $P_\ell(1) = 1$. □

Ortogonalita. Jednoduše můžeme ukázat, že Legendreovy polynomy jsou ortogonální vůči skalárnímu součinu danému integrálem

$$\langle P_\ell, P_m \rangle = \int_{-1}^1 dz P_\ell(z) P_m(z) = \frac{2}{2\ell + 1} \delta_{\ell m}.$$

Budeme postupovat poněkud abstraktněji. Diferenciální rovnici definující Legendreovy polynomy přepíšeme jako rovnici pro vlastní hodnoty a vektory jistého symetrického lineárního operátoru

$$A(P_\ell(z)) = -\frac{d}{dz} \left[(1 - z^2) \frac{dP_\ell(z)}{dz} \right] = \ell(\ell + 1)P_\ell(z)$$

působícího na polynomy. Dokážeme, že operátor A je hermiteovský, tj.

$$\begin{aligned} \langle A(u), v \rangle &= -\int_{-1}^1 dz \frac{d}{dz} \left[(1 - z^2) \frac{du(z)}{dz} \right] v(z) = \int_{-1}^1 dz (1 - z^2) \frac{du(z)}{dz} \frac{dv(z)}{dz} = \\ &= \int_{-1}^1 dz (1 - z^2) \frac{dv(z)}{dz} \frac{du(z)}{dz} = -\int_{-1}^1 dz u(z) \frac{d}{dz} \left[(1 - z^2) \frac{dv(z)}{dz} \right] = \langle u, A(v) \rangle. \end{aligned}$$

Pro hermiteovské operátory platí, že jejich vlastní hodnoty jsou reálné. Buď u vlastní vektor A s vlastní hodnotou λ . Potom zejména platí

$$\lambda \langle u, u \rangle = \langle u, \lambda u \rangle = \langle u, A(u) \rangle = \langle A(u), u \rangle = \langle \lambda u, u \rangle = \bar{\lambda} \langle u, u \rangle$$

odkud zřejmě $\lambda = \bar{\lambda}$. Dále platí, že vlastní vektory příslušné různým vlastním hodnotám jsou na sebe kolmé. Nechť u resp. v je vlastním vektorem A s vlastní hodnotou λ resp. μ . Potom

$$\lambda \langle u, v \rangle = \langle A(u), v \rangle = \langle u, A(v) \rangle = \mu \langle u, v \rangle, \quad \text{odtud} \quad (\lambda - \mu) \langle u, v \rangle = 0$$

a tvrzení je odtud zřejmé. Na závěr pomocí Rodriguesova vzorce spočteme

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 dz P_\ell(z) P_\ell(z) &= \frac{1}{2^{2\ell} (\ell!)^2} \frac{d^\ell}{dz^\ell} (z^2 - 1)^\ell \frac{d^\ell}{dz^\ell} (z^2 - 1)^\ell = \\ &= |\dots \ell\text{-krát per partes} \dots| = \\ &= \frac{(-1)^\ell}{2^{2\ell} (\ell!)^2} \int_{-1}^1 dz (z^2 - 1)^\ell \frac{d^{2\ell}}{dz^{2\ell}} (z^2 - 1)^\ell = \frac{(-1)^\ell}{2^{2\ell} (\ell!)^2} (2\ell)! \int_{-1}^1 dz (z^2 - 1)^\ell, \end{aligned}$$

což lze dále převést substitucí na Eulerovu B-funkci.

$$(-1)^\ell \int_{-1}^1 dz (1-z)^\ell (1+z)^\ell = \int_0^1 dt (1-t)^\ell t^\ell = \frac{\Gamma(\ell+1) \Gamma(\ell+1)}{\Gamma(2\ell+2)} = \frac{(\ell!)^2}{(2\ell+1)!}.$$

Odtud již je tvrzení zřejmé. □

Vraťme se nyní k rovnici pro radiální část. Ta po dosazení $\lambda = \ell(\ell+1)$ nabude tvaru

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dA}{dr} \right) - \ell(\ell+1)A = 0.$$

Řešení rovnice lze zjevně předpokládat ve tvaru monomu r^α (v prvním sčítanci se dvakrát derivuje a násobí r^2 , ve druhém se násobí konstantou). Po dosazení dostaneme kvadratickou rovnici pro α

$$\alpha(\alpha+1) - \ell(\ell+1) = 0.$$

Odtud máme $\alpha = \ell$ nebo $\alpha = -\ell - 1$. Obecné řešení původní lineární rovnice $\Delta\Phi = 0$ můžeme napsat jako lineární kombinaci součinu zjištěných řešení pro A a B , tj.

$$\Phi_\ell(r, \theta) = \begin{cases} r^\ell P_\ell(\cos \theta) & \text{uvnitř sféry } r < a \\ \frac{1}{r^{\ell+1}} P_\ell(\cos \theta) & \text{vně sféry } r > a \end{cases}, \quad \ell \in \mathbb{N}_0.$$

Uvnitř sféry musí totiž i v počátku soustavy souřadnic elektrostatický potenciál mít konečnou hodnotu, naopak vně sféry musí zejména platit $\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi_\ell(r, \theta) = 0$. Koefficienty lineární kombinace u jednotlivých členů získáme z okrajové podmínky, že plošná hustota náboje je konstantní a rovna $\pm\sigma$.

Spočtěme napřed elektrostatický potenciál uvnitř sféry. Obecné řešení v tomto případě je

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{\ell} r^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta),$$

kde $c_{\ell} \in \mathbb{R}$ jsou koeficienty, které musíme určit z okrajové podmínky. Spočtěme proto Φ pro $r = a$

$$\Phi(a, \theta) = \sum_{\ell=1}^{\infty} c_{\ell} a^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta) \Big|_{r=a} = \begin{cases} U_0, & 0 \leq \theta < \pi/2 \\ -U_0, & \pi/2 < \theta \leq \pi \end{cases}.$$

S označením

$$f_{\ell} = \frac{c_{\ell} a^{\ell}}{U_0} \quad \text{a} \quad z = \cos \theta$$

dostáváme

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} f_{\ell} P_{\ell}(z) = \begin{cases} 1 & 0 < z \leq 1 \\ -1 & -1 \leq z < 0 \end{cases}.$$

Na pravé straně je lichá funkce, pouze liché Legendreovy polynomy jsou liché funkce a v sumě nalevo se tedy budou vyskytovat pouze liché sčítance. Tyto koeficienty spočteme pomocí relací ortogonalit pro Legendreovy polynomy (ℓ i m liché)

$$\int_{-1}^1 dz \sum_{\ell=1}^{\infty} f_{\ell} P_{\ell}(z) P_m(z) = \frac{2}{2m+1} f_m = \int_{-1}^1 dz \operatorname{sgn}(z) P_m(z) = 2 \int_0^1 dz P_m(z).$$

Hodnota integrálu napravo lze získat pomocí dalších vlastností Legendreových polynomů (viz https://en.wikipedia.org/wiki/Legendre_polynomials) a celkem máme

$$c_{2k} = 0, \quad c_{2k+1} = (-1)^k \frac{U_0}{(2a)^{2k+1}} \frac{4k+3}{k+1} \binom{2k}{k},$$

čímž jsme získali elektrostatický potenciál uvnitř koule. Vně koule lze potenciál nalézt sférickou inverzí (vzhledem k $r = a$). Rovněž můžeme spočítat rozložení náboje na vnějším a vnitřním povrchu kulové slupky. Z Gaussovy věty volbou integrační oblasti V jako válce s infinitesimální podstavou, který prochází vnitřním resp. vnějším povrchem kulové slupky zjistíme, že normálová složka intenzity elektrického pole je co do velikosti rovna

$$E_v = -\frac{\partial \Phi}{\partial v} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Odtud již máme

$$\sigma(\theta) = \epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{r=a}$$

na vnitřním povrchu. Na vnějším povrchu $\sigma(\theta)$ pouze změní znaménko.

5.4. Multipólový rozklad pole. Zatím jsme uvažovali pouze rozložení náboje s azimutální symetrií (tj, symetrií vůči otočení v rovině xy). Nyní se tohoto zjednodušujícího předpokladu zbavíme a napíšeme zcela obecné řešení Laplaceovy rovnice

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \sin\theta \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} = 0$$

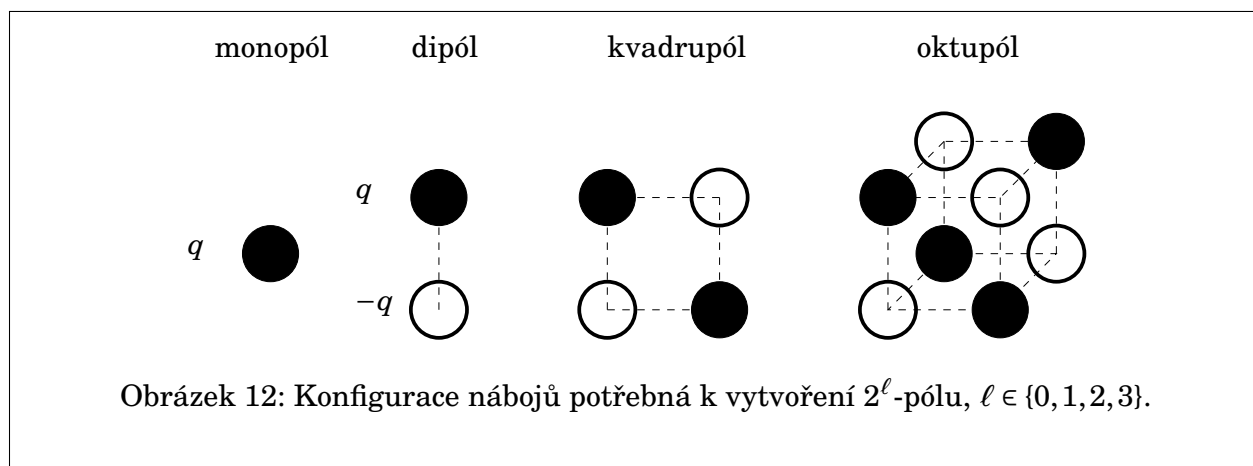
ve sférických souřadnicích (r, θ, φ) . Nebudeme provádět separaci proměnných a tím řešení odvozovat, jen odkážeme na https://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_harmonics.

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left(A_{\ell m} r^{\ell} + B_{\ell m} r^{-\ell-1} \right) Y_{\ell}^m(\theta, \varphi),$$

kde Y_{ℓ}^m jsou *sférické funkce*, definované s vhodnou normalizací⁶ jako

$$Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_{\ell}^m(\cos\theta) e^{im\varphi},$$

kde P_{ℓ}^m jsou tzv. *přidružené Legendreovy polynomy*, pro $m=0$ přecházejí v již známé Legendreovy polynomy. Člen řady s $\ell=0, 1, 2, 3$ se nazývá monopólový, dipólový, kvadrupólový, oktapólový, protože je můžeme získat jako vhodné symetrické konfigurace 1, 2, 4 a 8 bodových nábojů (viz obrázek 12). Sférické funkce pro malé ℓ a m jsou vyobrazeny např. na <http://physics.muni.cz/~krbek/sferickefunkce.shtml>. (index ℓ je nahoře, index m je dole).



Příklad 38. [5 bodů] Elementární dipól. Uvažme konfiguraci dvou nábojů na přímce podobnou obrázku 12 ve vzdálenosti a a uvažme limitu $a \rightarrow 0$ tak, že $d = qa = \text{konst}$. Dipólový

⁶Pozor, normalizační konvence není jednotná.

moment \mathbf{d} je vektor směřující od kladného náboje k zápornému. Spočtete elektrostatický potenciál a elektrickou intenzitu tohoto dipólu. $[\Phi(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}{4\pi\epsilon_0 r^3}]$

Příklad 39. [7 bodů] Elementární kvadrupól. Uvažme konfiguraci čtyř nábojů v rovině podobnou obrázku 12 tvořící čtverec o straně a a uvažme limitu $a \rightarrow 0$ tak, že $qa^2 = \text{konst.}$ Např. náboj $+q$ necht' je na pozicích $\pm a/2\mathbf{e}_x \pm a/2\mathbf{e}_y$ a náboj $-q$ na pozicích $\mp a/2\mathbf{e}_x \pm a/2\mathbf{e}_y$. Potom z Taylorovy řady v a dostaneme

$$\frac{1}{\sqrt{(x - \frac{a}{2})^2 + (y - \frac{a}{2})^2 + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x + \frac{a}{2})^2 + (y + \frac{a}{2})^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x - \frac{a}{2})^2 + (y + \frac{a}{2})^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x + \frac{a}{2})^2 + (y - \frac{a}{2})^2 + z^2}} = \frac{3xya^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} + O(a^3)$$

a máme

$$\Phi_2(x, y, z) = \frac{3xyqa^2}{4\pi\epsilon_0(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}. \quad \square$$

Multipólový rozvoj pro danou konfiguraci nábojů ve velké vzdálenosti od této soustavy ⁷ získáme srovnáním obou vyjádření řešení Poissonovy rovnice.

Na jedné straně máme

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}.$$

Pro $\|\mathbf{r}'\| \ll \|\mathbf{r}\|$ a úpravou ($\angle(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ značíme θ)

$$\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta = r^2 \left[1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{r'}{r} \cos \theta \right]$$

máme pomocí rozvoje do Taylorovy řady v $\xi = r'/r$ s označením $z = \cos \theta$

$$\frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2 - 2\xi z}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} Q_{\ell}(z) \xi^{\ell},$$

kde $Q_{\ell}(z)$ jsou právě Legendreovy polynomy v proměnné $z = \cos \theta$. Ze separace proměnných v Laplaceově rovnici dostaneme libovolné řešení nehomogenní rovnice jako součet obecného řešení homogenní rovnice (v našem případě okrajové podmínky diktují $\Phi_{\text{homogenní}} = 0$) a partikulárního řešení rovnice nehomogenní. Věnujme se tedy partikulárnímu řešení nehomogenní rovnice. Zjistili jsme, že funkce

$$\frac{1}{r} \xi^{\ell} Y_{\ell}^m(\theta, \varphi)$$

⁷Méně využívaný je analogický rozvoj pro malé vzdálenosti uvnitř soustavy formálně dosažitelný pomocí sférické inverze.

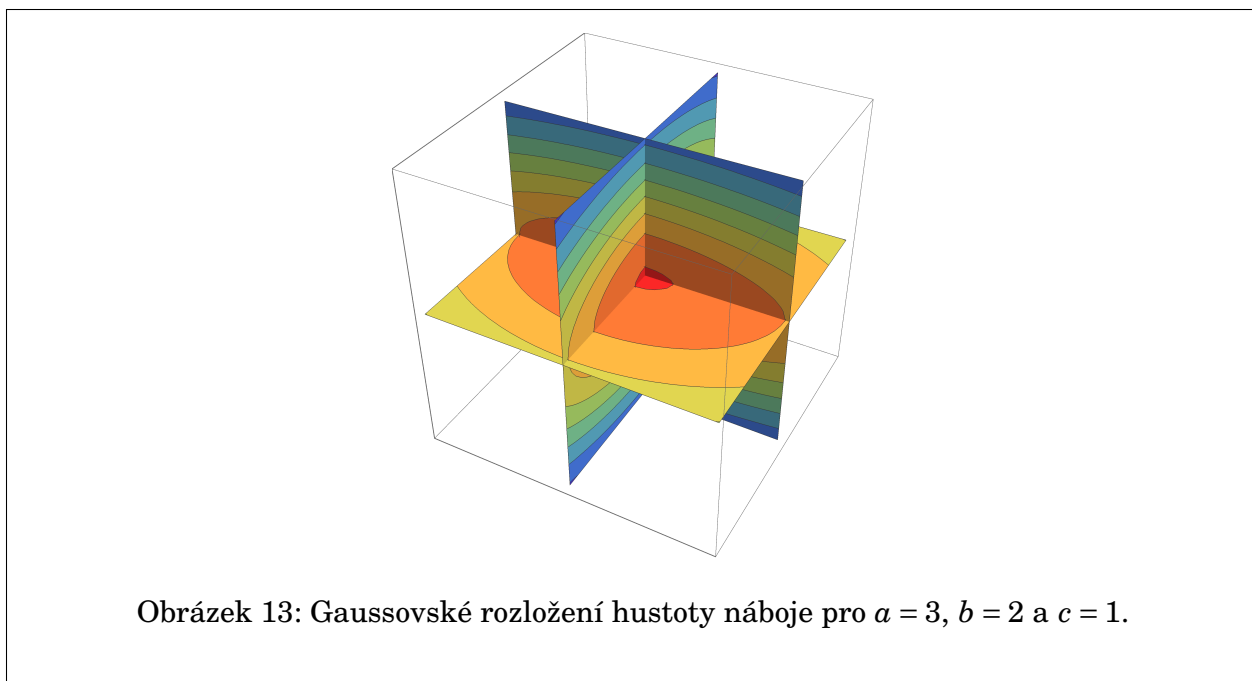
jsou vlastními funkcemi hermiteovského operátoru Δ s $(2\ell + 1)$ -krát degenerovanými vlastními hodnotami $\ell(\ell + 1)$. Vlastní funkce tvoří ortogonální systém na jednotkové sféře vzhledem ke skalárnímu součinu

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta f^*(\theta, \varphi)g(\theta, \varphi).$$

Multipólový rozvoj elektrostatického potenciálu tedy dostaneme jako

$$B_{\ell m} = \iiint_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) r^\ell Y_\ell^{m*}(\theta, \varphi).$$

Příklad 40. [5 bodů] Pro zadané rozložení hustoty náboje $\rho(\mathbf{r}) = \rho_0 \exp\left(-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right)$ (viz obrázek 13) spočítejte monopólový, dipólový, kvadrupólový a oktapólový moment.



Řešení: Jediné nenulové multipólové momenty pro $\ell \leq 3$ jsou

$$B_{00} = \frac{\pi}{2} abc$$

$$B_{20} = -\frac{\sqrt{5}}{8} \pi^2 abc (a^2 + b^2 - 2c^2)$$

$$B_{2\pm 2} = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{15}{2}} \pi^2 abc (a^2 - b^2)$$

□

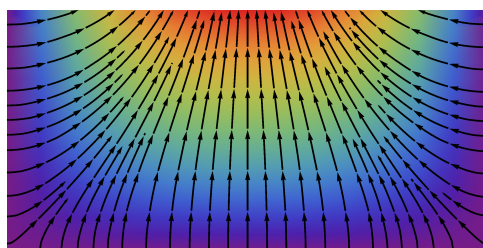
$r^\ell Y_\ell^m(\theta, \varphi)$	m			
	0	± 1	± 2	± 3
0	$\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$			
1	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}z$	$\mp \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}(x \pm iy)$		
2	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}(2z^2 - x^2 - y^2)$	$\mp \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}z(x \pm iy)$	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}(x \pm iy)^2$	
3	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{7}{\pi}}(5z^3 - 3z)$	$\mp \frac{1}{8}\sqrt{\frac{21}{\pi}}(4z^2 - x^2 - y^2)(x \pm iy)$	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{105}{2\pi}}z(x \pm iy)^2$	$\mp \frac{1}{8}\sqrt{\frac{35}{\pi}}(x \pm iy)^3$

Tabulka 3: Vyjádření sférických funkcí nízkých řádů pomocí kartézských souřadnic

Příklad 41. [10 bodů] Dokažte, že řešení Laplaceovy rovnice přejdou opět v řešení Laplaceovy rovnice při libovolném posunutí a otočení v prostoru i kulové inverzi. Pro pevné $R > 0$ a střed sféry v počátku soustavy souřadnic je inverze dána předpisem

$$\mathbf{r} \mapsto \frac{R^2}{\|\mathbf{r}\|^2} \mathbf{r}. \quad \square$$

Příklad 42. [5 bodů] Spočítejte elektrostatický potenciál v nekonečně vysoké krabici, jejíž zbývající hrany jsou a a b a jejíž jedna stěna je udržována na konstantním elektrostatickém potenciálu U_0 a ostatní jsou uzemněny (viz obrázek 14).



Obrázek 14: Elektrostatický potenciál a siločáry elektrostatického pole pro nekonečně vysoký kvádr, jehož boční stěny jsou $a = 2$ a $b = 1$ a elektrostatický potenciál na stěně $y = b$ je konstantní (pohled zhora).

Řešení: Postupujeme Fourierovou metodou separace proměnných v kartézských souřadnicích. Potenciál nezávisí kvůli symetrii na výškové souřadnici (zvolíme jako z). Stěna, jejíž potenciál bude nenulový bude $y = b$. Předpokládejme, že možná řešení jsou lineárními kombinacemi výrazů $\Phi(x, y) = X(x)Y(y)$. Z toho po dosazení máme

$$\Delta\Phi(x, y) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) X(x)Y(y) = Y(y) \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + X(x) \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = 0.$$

Odtud

$$-\frac{1}{X} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2}$$

a obě strany rovnice se tedy musí rovnat stejné konstantě, kterou označíme λ^2 . Napřed řešme rovnici pro X . Musí platit $X(0) = X(a) = 0$ a z toho dostaneme řešení

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{a}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

pro spočetnou množinu vlnových délek λ_n . Pro ni můžeme následně vyřešit rovnici pro Y . Její řešení splňující požadavek $Y(0) = 0$ je

$$Y_n(y) = \sinh \frac{n\pi y}{a}$$

a obecné řešení úlohy je lineární kombinací součinů $X_n(x)Y_n(y)$, tj.

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi y}{a}.$$

K určení koeficientů B_n lineární kombinace použijeme poslední podmínku $\Phi(x, b) = U_0$. Proto

$$U_0 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh \frac{n\pi b}{a} \sin \frac{n\pi x}{a}.$$

Označme $C_n = \frac{B_n}{U_0} \sinh \frac{n\pi b}{a}$. Potom C_n získáme jako Fourierovy koeficienty lichého rozšíření konst. funkce U_0 . Po dosazení dostaneme

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{a}$$

Tuto rovnici vynásobíme $\sin \frac{m\pi x}{a}$ a zintegrujeme přes x od 0 do a . Pro $m \neq n$ je

$$\int_0^a dx \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} = 0,$$

pro $m = n$ dostaneme

$$\int_0^a dx \sin^2 \frac{m\pi x}{a} = \frac{a}{2}.$$

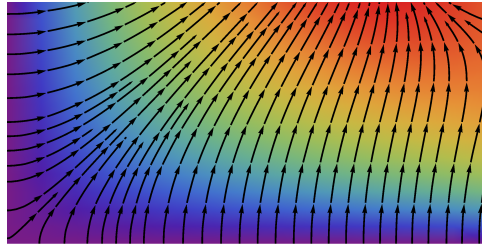
Odtud máme

$$C_m = \frac{2}{a} \int_0^a dx \sin \frac{m\pi x}{a} = \frac{2}{m\pi} (1 - \cos m\pi) = \frac{2}{m\pi} (1 - (-1)^m) = \begin{cases} 0 & \text{pro } m \text{ sudé,} \\ \frac{4}{m\pi} & \text{pro } m \text{ liché.} \end{cases}$$

Odtud nakonec dostaneme úplné řešení úlohy ($n = 2k + 1$)

$$\Phi(x, y) = \frac{4U_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sinh \frac{(2k+1)\pi y}{a} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{a}}{(2k+1) \sinh \frac{(2k+1)\pi b}{a}}. \quad \square$$

Příklad 43. [10 bodů] Využijte řešení předchozího příkladu a principu superpozice (tj. linearity Laplaceova operátoru) pro nalezení řešení pro případ, kdy jsou uzemněny dvě sousední stěny a zbývající dvě sousední stěny jsou udržovány na konstantním potenciálu U_0 . [viz obrázek 15]



Obrázek 15: Elektrostatický potenciál a siločáry elektrostatického pole pro nekonečně vysoký kvádr, jehož boční stěny jsou $a = 2$ a $b = 1$ a elektrostatický potenciál na stěnách $y = b$ a $x = a$ je konstantní (pohled zhora).

5.5. Řešení úloh magnetostatiky. Jak jsme již ukázali v úvodní části této kapitoly, je řešení úloh magnetostatiky v kartézské soustavě souřadnic analogické řešení tří nezávislých úloh elektrostatických. Např. v \mathbb{R}^3 bez dalších okrajových podmínek je řešení magnetostatické úlohy

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}),$$

dáno analogicky jako

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{r}' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}.$$

Příklad 44. [5 bodů] Spočítejte pomocí předchozího vzorce $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ a odvoďte tím Biot-Savartův zákon.

Příklad 45. [8 bodů] Spočítejte magnetické pole smyčky ve tvaru kružnice o poloměru R protékané konstantním proudem I . Kružnici umístíme do roviny xy tak, že její střed splývá s počátkem soustavy kartézských souřadnic, proud I smyčkou protéká v kladném smyslu otáčení. Hustota proudu je potom dána ve válcových souřadnicích (ρ', φ', z')

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' = I \delta(\rho' - R) \delta(z') \mathbf{e}_{\varphi'} \rho' d\rho' d\varphi' dz'.$$

Dosaďme nyní do vzorce pro magnetický potenciál s uvažováním $\mathbf{r} = \rho \mathbf{e}_{\rho} + z \mathbf{e}_z$ (obdobně $\mathbf{r}' = \rho' \mathbf{e}_{\rho'} + z' \mathbf{e}_{z'}$) a také

$$(\mathbf{e}_{\rho'}, \mathbf{e}_{\varphi'}, \mathbf{e}_{z'}) = (\mathbf{e}_{\rho}, \mathbf{e}_{\varphi}, \mathbf{e}_z) \begin{pmatrix} \cos(\varphi' - \varphi) & -\sin(\varphi' - \varphi) & 0 \\ \sin(\varphi' - \varphi) & \cos(\varphi' - \varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a dostaneme následující

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{r}' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|} = \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^\infty \rho' d\rho' \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-\infty}^\infty dz' \frac{I \delta(\rho'-R)\delta(z')\mathbf{e}_{\varphi'}}{\|\rho\mathbf{e}_\rho + z\mathbf{e}_z - \rho'\mathbf{e}_{\rho'} - z'\mathbf{e}_{z'}\|} = \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^\infty \rho' d\rho' \int_{-\pi}^\pi d\varphi' \int_{-\infty}^\infty dz' \frac{I \delta(\rho'-R)\delta(z')(-\sin(\varphi'-\varphi)\mathbf{e}_\rho + \cos(\varphi'-\varphi)\mathbf{e}_\varphi)}{\|\rho\mathbf{e}_\rho + z\mathbf{e}_z - \rho'(\cos(\varphi'-\varphi)\mathbf{e}_\rho + \sin(\varphi'-\varphi)\mathbf{e}_\varphi) - z'\mathbf{e}_z\|} = \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\pi}^\pi d\varphi' \frac{RI(-\sin(\varphi'-\varphi)\mathbf{e}_\rho + \cos(\varphi'-\varphi)\mathbf{e}_\varphi)}{\|\rho\mathbf{e}_\rho + z\mathbf{e}_z - R(\cos(\varphi'-\varphi)\mathbf{e}_\rho + \sin(\varphi'-\varphi)\mathbf{e}_\varphi)\|} = \\
&= \frac{RI\mu_0}{4\pi} \int_{-\pi}^\pi d\varphi' \frac{-\sin(\varphi'-\varphi)\mathbf{e}_\rho + \cos(\varphi'-\varphi)\mathbf{e}_\varphi}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho R \cos(\varphi'-\varphi) + R^2 + z^2}} = \\
&= \frac{RI\mu_0}{4\pi} \int_{-\pi}^\pi d\varphi' \frac{\cos(\varphi'-\varphi)\mathbf{e}_\varphi}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho R \cos(\varphi'-\varphi) + R^2 + z^2}} = \\
&= \frac{RI\mu_0}{2\pi} \int_0^\pi d\varphi' \frac{\cos \varphi' \mathbf{e}_\varphi}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho R \cos \varphi' + R^2 + z^2}} = \\
&= \frac{I\mu_0}{k\pi} \sqrt{\frac{R}{\rho}} \left[\left(1 - \frac{k^2}{2}\right) \mathbf{K}(k) - \mathbf{E}(k) \right] \mathbf{e}_\varphi,
\end{aligned}$$

kde

$$k^2 = \frac{4R\rho}{(R+\rho)^2 + z^2}, \quad \mathbf{K}(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 t}}, \quad \mathbf{E}(k) = \int_0^{\pi/2} dt \sqrt{1-k^2 \sin^2 t}.$$

Odtud již s využitím vlastností úplných eliptických integrálů⁸ a jejich derivací dostáváme

$$\sqrt{(R+\rho)^2 + z^2} \frac{2\pi}{\mu_0 I} \mathbf{B}(\rho, z) = \frac{z}{\rho} \left[\frac{R^2 + \rho^2 + z^2}{(R-\rho)^2 + z^2} \mathbf{E}(k) - \mathbf{K}(k) \right] \mathbf{e}_\rho + \left[\frac{R^2 - \rho^2 - z^2}{(R-\rho)^2 + z^2} \mathbf{E}(k) + \mathbf{K}(k) \right] \mathbf{e}_z.$$

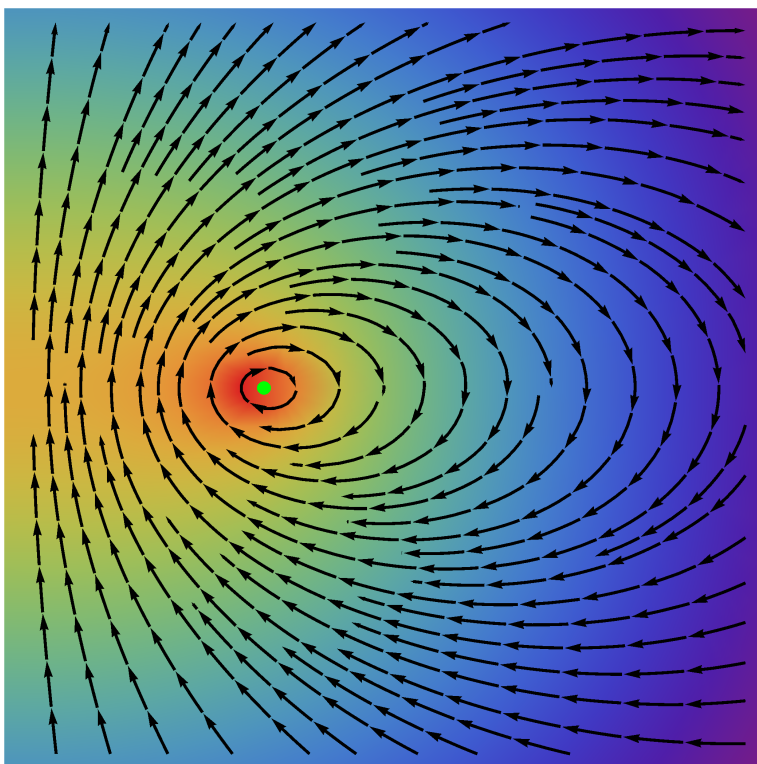
□

Vzhledem k platnosti principu superpozice a skutečnosti, že cívku můžeme aproximovat jako superpozici posunutých a otočených (případně i naškálovaných) smyček, můžeme takto získat i magnetický potenciál a indukci solenoidu a toroidu.

Příklad 46. [20+20 bodů] Napište počítačový program, který spočte magnetickou indukci solenoidu a/nebo toroidu. (viz obrázek 19 pro solenoid)

5.6. Multipólový rozvoj pro magnetický potenciál. Pro každou kartézskou složku vektorového potenciálu \mathbf{A} můžeme provést multipólový rozvoj obdobně ale složitěji jako v elek-

⁸viz https://en.wikipedia.org/wiki/Elliptic_integral



Obrázek 16: Siločáry magnetické indukce pro kruhovou smyčku (řez polorovinou $\varphi = 0$). Vodorovná osa odpovídá souřadnici ρ , svislá z . (Přirozený) logaritmus velikosti vektoru magnetické indukce odpovídá patřičné barvě spektra.

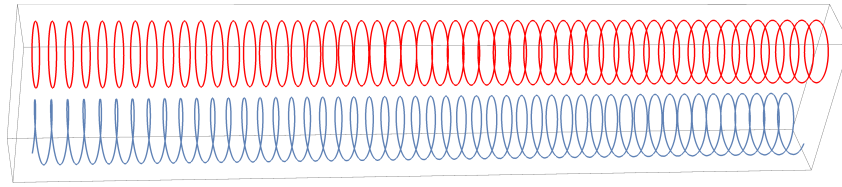
trostatice. Spokojíme se proto zde s prvními dvěma členy tohoto rozvoje.

$$\frac{4\pi}{\mu_0} A_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{\|\mathbf{r}\|} \iiint_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{r}' J_i(\mathbf{r}') + \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} \cdot \iiint_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{r}' J_i(\mathbf{r}') \mathbf{r}' + \dots$$

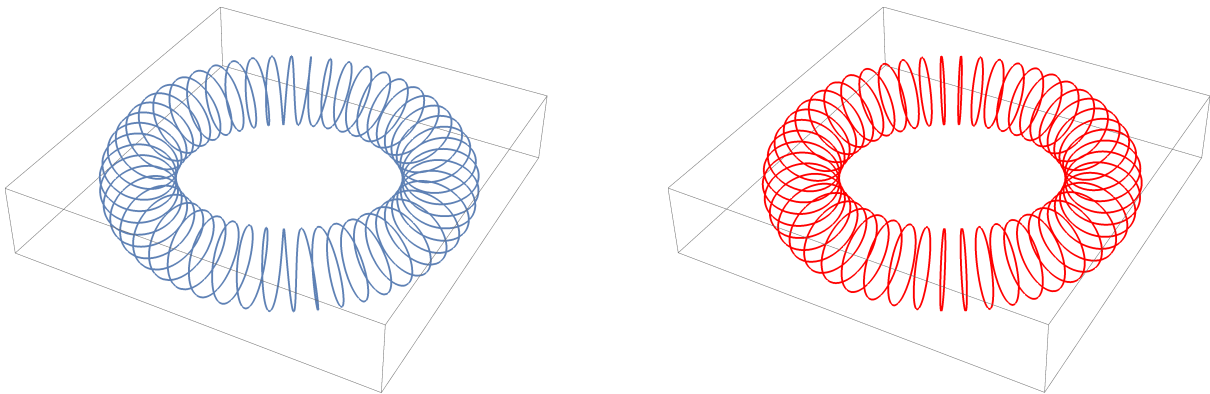
Použitím Gaussovy věty pro lokalizované \mathbf{J} máme

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{r} \mathbf{J} \cdot \nabla f = - \iiint_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{r} f \nabla \cdot \mathbf{J}.$$

Za f dosadíme postupně kartézské souřadnicové funkce x , y a z . Dále víme, že rovnice kontinuity dává $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$. Odtud vidíme, že první sčítanec v multipólovém rozvoji vektorového



Obrázek 17: Solenoid přesný (modře dole) a aproximovaný soustavou kružnic (červeně nahoře). Počet závitů solenoidu i počet aproximujících kružnic je $N = 50$.



Obrázek 18: Navinutý toroid (modře vlevo) a aproximovaný soustavou kružnic (červeně vpravo). Počet závitů toroidu i počet aproximujících kružnic je $N = 50$.

potenciálu je nulový. Upravme nyní do vhodného tvaru druhý sčítanec. Uvažme integrál

$$\iiint_{\mathbf{R}^3} d^3\mathbf{r}' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = -\frac{1}{2} \mathbf{r} \times \iiint_{\mathbf{R}^3} d^3\mathbf{r}' \mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}').$$

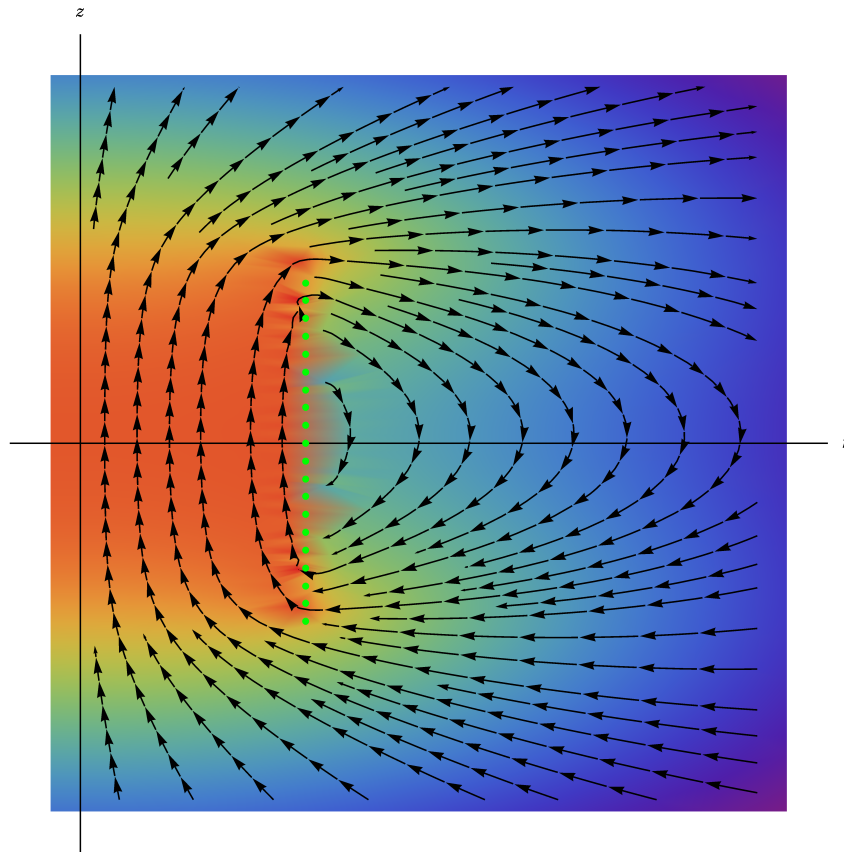
Příklad 47. [5 bodů] Předchozí rovnost dokažte. Využijte Gaussovu větu, rovnost pro trojnásobný vektorový součin a $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$.

Definujme nyní magnetický moment \mathbf{m} lokalizované distribuce proudu \mathbf{J} jako

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathbf{R}^3} d^3\mathbf{r}' \mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}').$$

Potom dostáváme, že

$$\frac{4\pi}{\mu_0} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} + \dots.$$



Obrázek 19: Magnetická indukce solenoidu aproximovaného soustavou kružnic ($N = 20$). Patrný je jak efekt konečné délky solenoidu, tak i jeho řídkého “vinutí”.

Příklad 48. [3 body] Spočítejte magnetický moment rovinné smyčky ve tvaru obdélníka o stranách a a b , kterou protéká elektrický proud I . [$Iab\mathbf{n}$]

Pro systém pohybujících se nabitých částic s proudovou hustotou

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \sum_J q_J \mathbf{v}_J \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_J)$$

dostaneme

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \sum q_J \mathbf{r}_J \times \mathbf{v}_J = \frac{1}{2} \sum \frac{q_J}{m_J} \mathbf{r}_J \times \mathbf{p}_J.$$

Pokud je pro všechny částice podíl $q_J/m_J = q/m$ stejný, můžeme psát

$$\mathbf{m} = \frac{q}{2m} \sum_J \mathbf{L}_J = \frac{q}{2m} \mathbf{L},$$

kde \mathbf{L} je celkový dráhový moment hybnosti. Celková síla, kterou na proudovou smyčku v blízkosti počátku soustavy souřadnic působí magnetické pole o indukci

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(0) + \mathbf{r} \cdot (\nabla \mathbf{B})(0) + \dots$$

je dána jako

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \left[\iiint_{\mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{r}' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \right] \times \mathbf{B}(\mathbf{r}') = \iiint_{\mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{r}' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times [\mathbf{B}(0) + \mathbf{r}' \cdot (\nabla \mathbf{B})(0) + \dots] = \\ &= \left[\iiint_{\mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{r}' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \mathbf{r}' \right] \cdot \nabla \mathbf{B}(0) + \dots \approx -\nabla \times (\mathbf{m} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) \end{aligned}$$

Z toho je též zřejmé, že potenciální energie smyčky v magnetickém poli je přibližně $W = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$. Zabývejme se nyní přibližným vyjádřením momentu síly působícím na proudovou smyčku. Zde v první aproximaci obdobným výpočtem dojdeme k

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}(0) + \dots$$

Příklad 49. [3 body] Spočítejte magnetickou indukci elementárního magnetického dipólu s magnetickým momentem \mathbf{m} . (viz obrázek 20)

$$[\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - \|\mathbf{r}\|^2 \mathbf{m}}{\|\mathbf{r}\|^5}]$$

5.7. Elektrostatické pole v dielektrících. Lokalizované rozložení hustoty náboje, která je nenulová jen uvnitř sféry o poloměru R , je popsáno vně této sféry pomocí multipólového rozvoje, jehož první členy jsou uvedeny v tabulce 3. Odstraněním komplexních hodnot pro skalár monopólového momentu (celkový náboj), vektor dipólového a bezstopý symetrický 2-tenzor kvadrupólového momentu dostaneme

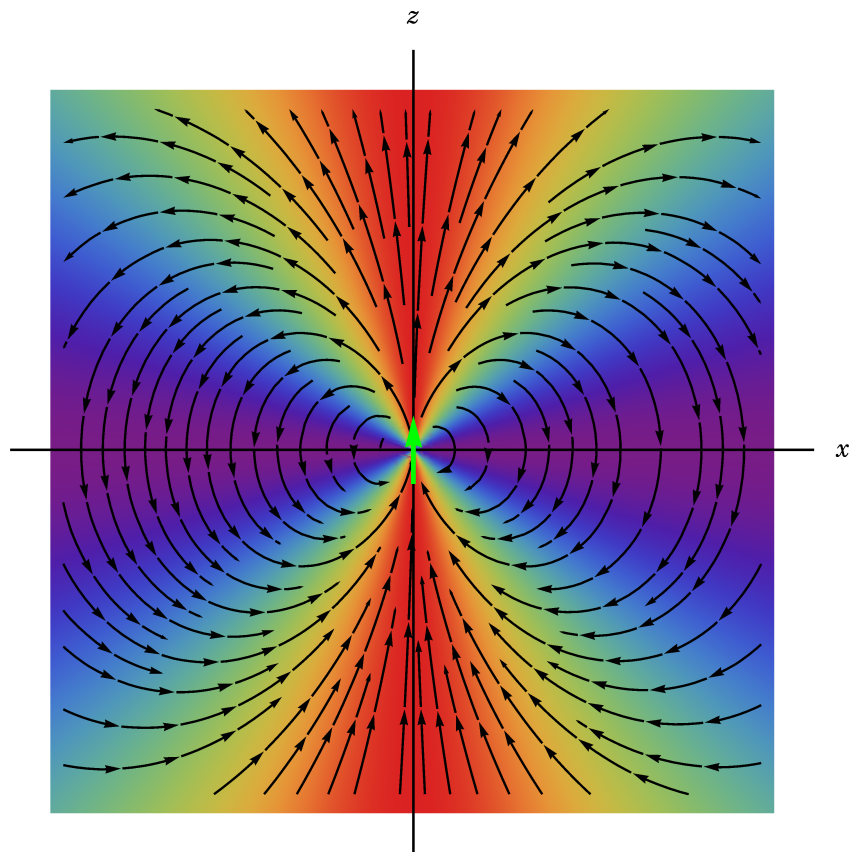
$$q = \iiint d^3 \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{d} = \iiint d^3 \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}', \quad Q_{ij} = \iiint d^3 \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') [3x'_i x'_j - \delta_{ij} (r')^2].$$

Všimněte si analogie definic kvadrupólového momentu a tenzoru momentu setrvačnosti tuhého tělesa. V prvním případě je ρ hustota náboje, v druhém hustota hmoty. Momenty vyššího řádu při popisu elektromagnetických polí v dielektriku potřebovat nebudeme.

Příklad 50. [3 body] Vyjádřete monopólový, dipólový a kvadrupólový moment pomocí momentů v tabulce 3.

Elektrostatický potenciál můžeme vyjádřit ve tvaru (konvergentní) řady, v níž budeme potřebovat nejvýše první tři členy.

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{\|\mathbf{r}\|} + \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{Q_{ij} x^i x^j}{\|\mathbf{r}\|^5} + \dots \right).$$



Obrázek 20: Magnetická indukce elementárního magnetického dipólu (řez rovinou xz). Barva spektra odpovídá velikosti $\|\mathbf{B}\| \|\mathbf{r}\|^3$.

Můžeme dosadit do výrazu pro elektrostatickou potenciální energii

$$W = \iiint d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}).$$

Rozvojem

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi(0) - \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(0) - \frac{1}{2} \sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial E_i}{\partial x_j}(0) - \dots$$

a dosazením do předchozího vzorce získáme (s využitím $\nabla \mathbf{E}(0) = 0$)

$$W = q\Phi(0) - \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(0) - \frac{1}{6} \sum_{i,j} Q_{ij} \frac{\partial E_i}{\partial x_j}(0) - \dots$$

Speciálně pro interakční energii dvou dipólů \mathbf{p}_1 v bodě \mathbf{r}_1 a \mathbf{p}_2 v bodě \mathbf{r}_2 máme z výsledku příkladu 38 a předchozího vzorce

$$W_{12} = \frac{\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2 \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^2 - 3[(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{d}_1][(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{d}_2]}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^5}.$$

V dielektriku platí mikroskopické Maxwellovy rovnice

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0$$

pro mikroskopickou intenzitu $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ a hustotu náboje $\rho(\mathbf{r})$. Tyto mikroskopické veličiny nás obvykle nezajímají, resp. je neznáme ani nepotřebujeme znát. Zajímají nás prostorově středované střední hodnoty elektrické intenzity a známe obvykle prostorovou střední hodnotu hustoty ρ . Také pomíjíme, že hustota náboje závisí na čase, protože implicitně uvažujeme časové střední hodnoty. Přesnější odvození makroskopických Maxwellových rovnic stejně vyžaduje použití kvantové teorie a statistické fyziky, následující postup proto berme spíše jako heuristický. Na volbě přesné procedury prostorového středování výsledek příliš nezávisí, ale pro konkrétnost postupujme následovně. Označme $B_R(\mathbf{r})$ kouli o poloměru R se středem v bodě \mathbf{r} . Potom označme

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{3}{4\pi R^3} \iiint_{B_R(\mathbf{r})} d^3 \mathbf{s} \mathbf{E}(\mathbf{r} - \mathbf{s}), \quad \langle \rho(\mathbf{r}) \rangle = \frac{3}{4\pi R^3} \iiint_{B_R(\mathbf{r})} d^3 \mathbf{s} \rho(\mathbf{r} - \mathbf{s})$$

prostorové střední hodnoty. Poloměr koule volíme obvykle tak, aby R mnohem přesahovalo molekulární rozměry ($\approx 10^{-9}$ m), ale stále bylo dostatečně malé, aby nedosahovalo makroskopických rozměrů ($\approx 10^{-4}$ m). Pro účely makroskopické elektrostatiky je vhodné rozdělit vystředovanou hustotu náboje na dva sčítance: prvním je vystředovaná hustota náboje atomů a molekul a druhým je náboj indukovaný vnějším makroskopickým polem. Pokud vnější makroskopické pole není přítomno, jsou dipólové momenty molekul orientovány náhodně a jejich celkový příspěvek je zanedbatelný. V přítomnosti vnějšího makroskopického pole mají dipólové momenty tendenci se orientovat v jeho směru a jsou mu úměrné.

Uvažme napřed jednu molekulu se středem hmotnosti v bodě \mathbf{r}_I a hustotou náboje $\rho_I(\mathbf{r}')$, kde vektor \mathbf{r}' určuje polohu vzhledem ke středu hmotnosti molekuly. Mikroskopické elektrické pole vyvolané touto molekulou je

$$4\pi\epsilon_0 \mathbf{E}_I(\mathbf{r}) = -\nabla \iiint_{\text{molekula}} d^3 \mathbf{r}' \frac{\rho_I(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_I - \mathbf{r}'\|}.$$

Pro polohy \mathbf{r} mimo molekulu můžeme provést multipólový rozklad vzhledem ke středu hmotnosti molekuly, tj.

$$4\pi\epsilon_0 \mathbf{E}_I(\mathbf{r}) = -\nabla \left[\frac{q_I}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_I\|} + \mathbf{d}_I \cdot \nabla_I \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_I\|} + \dots \right],$$

kde q_I je celkový náboj molekuly a \mathbf{d}_I je celkový dipólový moment molekuly. Nyní přikročíme ke středování. Celková hustota náboje molekul je

$$\rho_{\text{mol}}(\mathbf{r}) = \sum_I q_I \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_I)$$

a celková dipólová hustota molekul je

$$\mathbf{d}_{\text{mol}}(\mathbf{r}) = \sum_I \mathbf{d}_I \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_I).$$

Z toho dostaneme celkovou mikroskopickou intenzitu elektrostatického pole

$$4\pi\epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \iiint_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{r}'' \left[\frac{\rho_{\text{mol}}(\mathbf{r}'')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}''\|} + \mathbf{d}_{\text{mol}}(\mathbf{r}'') \cdot \nabla'' \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}''\|} + \dots \right]$$

a z ní nyní spočteme prostorovou střední hodnotu

$$4\pi\epsilon_0 \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rangle = -\nabla \frac{3}{4\pi R^3} \iiint_{B_R(\mathbf{r})} d^3\mathbf{s} \iiint_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{r}'' \left[\frac{\rho_{\text{mol}}(\mathbf{r}'')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{s} - \mathbf{r}''\|} + \mathbf{d}_{\text{mol}}(\mathbf{r}'') \cdot \nabla'' \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{s} - \mathbf{r}''\|} + \dots \right],$$

kde jsme využili skutečnosti, že středování je lineární operace a tedy záměnná s gradientem. Nyní můžeme provést substituci $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'' + \mathbf{s}$ a tím získáme

$$4\pi\epsilon_0 \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rangle = -\nabla \frac{3}{4\pi R^3} \iiint_{B_R(\mathbf{r})} d^3\mathbf{s} \iiint_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{r}' \left[\frac{\rho_{\text{mol}}(\mathbf{r}' - \mathbf{s})}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} + \mathbf{d}_{\text{mol}}(\mathbf{r}' - \mathbf{s}) \cdot \nabla' \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} + \dots \right],$$

což můžeme použitím věty o střední hodnotě přepsat jako

$$\begin{aligned} 4\pi\epsilon_0 \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rangle &= -\nabla \iiint_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{r}' \frac{3}{4\pi R^3} \iiint_{B_R(\mathbf{r})} d^3\mathbf{s} \left[\frac{\rho_{\text{mol}}(\mathbf{r}' - \mathbf{s})}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} + \mathbf{d}_{\text{mol}}(\mathbf{r}' - \mathbf{s}) \cdot \nabla' \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} + \dots \right] = \\ &= -\nabla \iiint_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{r}' \left[\frac{\langle \rho_{\text{mol}}(\mathbf{r}') \rangle}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} + \langle \mathbf{d}_{\text{mol}}(\mathbf{r}') \rangle \cdot \nabla' \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Dále uvažme, že

$$\nabla^2 \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

a proto

$$4\pi\epsilon_0 \nabla \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rangle = \iiint_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{r}' \left[4\pi \langle \rho_{\text{mol}}(\mathbf{r}') \rangle \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + 4\pi \langle \mathbf{d}_{\text{mol}}(\mathbf{r}') \rangle \cdot \nabla' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \dots \right].$$

Druhý sčítanec upravíme per partes a využitím definiční vlastnosti Diracovy δ -funkce dostaneme

$$4\pi\epsilon_0 \nabla \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rangle = 4\pi \langle \rho_{\text{mol}}(\mathbf{r}) \rangle - 4\pi \nabla \langle \mathbf{d}_{\text{mol}}(\mathbf{r}) \rangle.$$

Nakonec zavedeme makroskopickou veličinu $\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rangle + \langle \mathbf{d}_{\text{mol}}(\mathbf{r}) \rangle$ a nazveme ji elektrickou indukcí a dále označme $\rho_{\text{vázaný}}(\mathbf{r}) = \langle \rho_{\text{mol}}(\mathbf{r}) \rangle$. Vidíme, že se zanedbáním kvadrupólových a vyšších momentů dostaneme makroskopickou rovnici elektrostatiky

$$\nabla \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho_{\text{volný}}(\mathbf{r}).$$

Dále pro střední hodnotu elektrické intenzity stále platí rovnice

$$\nabla \times \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rangle = 0.$$

Pokud je náboj vázaný ve více typech molekul, musíme prostě hustotu náboje a dipólového momentu sečíst přes všechny typy molekul. Pokud je přítomen volný náboj, musíme jej přičíst k náboji vázanému. Tím dostáváme makroskopické rovnice elektrostatiky.

$$\nabla \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho_{\text{volný}}(\mathbf{r}), \quad \nabla \times \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rangle = 0.$$

Celkový vázaný náboj je obvykle nulový, protože molekuly jsou většinou neutrální. Zůstává k objasnění otázka, jak souvisí prostorová střední hodnota hustoty dipólového momentu $\langle \mathbf{d}_{\text{mol}}(\mathbf{r}) \rangle$ se střední hodnotou elektrické intenzity $\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}') \rangle$. Budeme se zabývat pouze tou nejjednodušší představitelnou situací, kdy střední hodnota hustoty dipólového momentu závisí na střední hodnotě intenzity elektrického pole *ve stejném bodě* lineárně. Konstanta úměrnosti se nazývá elektrická susceptibilita χ a budeme předpokládat, že platí $\langle \mathbf{d}_{\text{mol}}(\mathbf{r}) \rangle = \chi \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rangle$.

Příklad 51. [4 body] Ukažte, že pokud budeme molekuly považovat přibližně za klasické harmonické oscilátory s neinteragujícími hamiltoniány v homogenním konstantním elektrickém poli \mathbf{E}

$$H_{\text{mol}} = \frac{1}{2m_{\text{mol}}} \|\mathbf{P}\|^2 + \frac{k}{2} \|\mathbf{R}\|^2 + q\mathbf{E} \cdot \mathbf{R},$$

dostaneme na základě výpočtu střední hodnoty dipólového momentu s kanonickým rozdělením $d^3\mathbf{P}d^3\mathbf{R} \exp(-\beta H)$, $\beta = 1/k_B T$ v termodynamické rovnováze s okolím právě takový jednoduchý lineární vztah. [$\langle \mathbf{p}_{\text{mol}} \rangle = q^2/k \langle \mathbf{E} \rangle$]

Příklad 52. [5 bodů] Pro klasickou molekulu spočítejte podobně jako v předchozím příkladě střední hodnotu dipólového momentu v kanonickém rozdělení tentokrát v závislosti na jeho orientaci vzhledem k makroskopické elektrické intenzitě. Zde

$$H = H_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}.$$

Počítejte v limitě vysokých teplot, tj. $\beta \mathbf{p} \cdot \mathbf{E} \ll 1$.

$$[\langle \mathbf{p} \rangle \approx \frac{1}{3} \beta \|\mathbf{p}\|^2 \langle \mathbf{E} \rangle]$$

Obdobně ale složitějším způsobem dojdeme heuristicky k makroskopickým rovnicím magnetostatiky

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{B} \rangle = 0, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\text{volný}}$$

a ke vztahu mezi magnetickou intenzitou \mathbf{H} a střední hodnotou indukce $\langle \mathbf{B} \rangle$. Zde v nejjednodušších situacích dostaneme

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \langle \mathbf{B} \rangle.$$

V dalším již makroskopické hodnoty fyzikálních veličin nebudeme označovat pomocí střední hodnoty $\langle \cdot \rangle$. Mikroskopické veličiny již nebudeme vesměs uvažovat.

5.8. Okrajové podmínky v elektrostatice a magnetostatice na rozhraní dvou jednoduchých prostředí. Z makroskopických rovnic elektrostatiky a magnetostatiky s využitím Gaussovy a Stokesovy věty již snadno odvodíme podmínky, které musí platit na rozhraní dvou prostředí s rozdílnými vlastnostmi. Za tímto účelem budeme vždy uvažovat myšlený malý váleček s podstavami kolnými na rozhraní umístěnými v rozdílných prostředích a také myšlenou uzavřenou malou obdélníkovou křivku s protilehlými stranami umístěnými v různých prostředích a rovnoběžnými s rozhraním. Potom

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} = \Sigma, \quad (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \times \mathbf{n} = 0$$

a

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K}, \quad (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n} = 0.$$

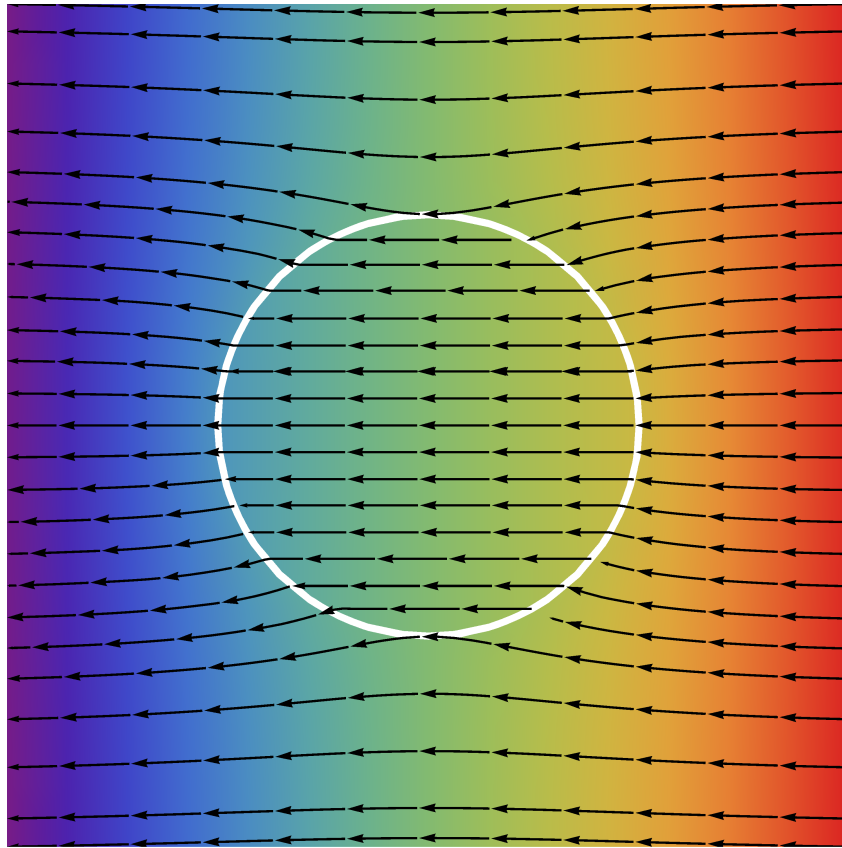
Zde jsou Σ plošná hustota *volného* náboje (značíme velkým řeckým písmenem kvůli odlišení od elektrické vodivosti) a \mathbf{K} plošná hustota proudu *volných* nábojů.

Příklad 53. [10 bodů] Celý prostor je vyplněn dielektrikem s permitivitou ϵ_1 a je v něm přítomno homogenní elektrické pole o konstantní intenzitě \mathbf{E} . Z prostředí vyřízneme kouli se středem v počátku soustavy souřadnic a poloměrem R a umístíme tam kouli se stejným poloměrem ale permitivitou ϵ_2 . Spočítejte intenzitu elektrického pole všude v prostoru. Řešení ukazuje obrázek 21.

6. Nestacionární Maxwellovy rovnice

6.1. Kvazistacionární elektromagnetická pole a hustoty. V této kapitole se budeme zabývat makroskopickými rovnicemi teorie elektromagnetického pole, kde navíc některé veličiny mohou být časově proměnné. Rychlé časové změny nebudeme brát v úvahu tím, že kromě prostorového středování provádíme zároveň i časové středování. Ve vodičích za normálních podmínek souvisí proudová hustota nábojů \mathbf{j} s intenzitou elektrického pole \mathbf{E} . Nejjednodušší možný vztah je lineární, konstanta úměrnosti se nazývá elektrická vodivost a označuje se σ . Máme tedy diferenciální tvar Ohmova zákona

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}.$$



Obrázek 21: Elektrostatický potenciál (barvy spektra) a siločáry elektrického pole pro dielektrickou kouli $\epsilon_2 = 2$ v dielektrickém médiu $\epsilon_1 = 1$ v původně homogenním elektrickém poli (bokorys a půdorys).

Heuristické zdůvodnění platnosti tohoto zákona je následující: nabitě částice ve vodiči jsou urychlovány elektrickým polem ale ztrácí energii srážkami s krystalovou mřížkou.

Příklad 54. [4 body] Odvoďte Ohmův zákon v integrálním tvaru pro vodič libovolného konstantního průřezu.

Příklad 55. [5 bodů] Povrchové jevy v nekonečném přímém vodiči kruhového průřezu. Poloměr kruhu necht' je R . V Maxwellových rovnicích můžeme zanedbat tzv. posuvný proud, tj.

$$\|\mathbf{j}\| \gg \epsilon_0 \left\| \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right\|, \quad \|\nabla \times \mathbf{B}\| \gg \frac{1}{c^2} \left\| \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right\|.$$

Dosazením z Ohmova zákona v diferenciálním tvaru dostáváme následující lineární homo-

genní soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \sigma \mathbf{E} & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0. \end{aligned}$$

Zvolme osu vodiče jako osu z a použijme válcové souřadnice. Orientovaná válcová symetrie vodiče a linearita rovnic nás vede k tomu, že

$$\mathbf{E}(t, r, z) = E(r) \mathbf{e}_z e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{B}(t, r, z) = B(r) \mathbf{e}_\varphi e^{-i\omega t}.$$

Po dosazení dostáváme

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{dE(r)}{dr} \right] = -i\omega \mu_0 \sigma E(r), \quad i\omega B(r) = -\frac{dE(r)}{dr}.$$

Označme $k^2 = i\omega \mu_0 \sigma$ a provedme v první rovnici substituci $\rho = kr$. Dostáváme

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left[\rho \frac{dE(\rho)}{d\rho} \right] + E(\rho) = 0.$$

Řešení rovnice konečné v ose vodiče hledáme Frobeniovou metodou, tj. ve tvaru nekonečné řady, jejíž koeficienty určíme rekurentně požadavkem splnění rovnice. Definujeme-li Besselovy funkce⁹

$$J_\alpha(\rho) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m + \alpha + 1)} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m + \alpha},$$

potom

$$E(\rho) = A J_0(\rho) \quad \text{a odtud} \quad E(kr) = J_0(kr).$$

Z druhé rovnice a z definice viditelného faktu $dJ_0(\rho)/d\rho = -J_1(\rho)$ můžeme dostat

$$B(r) = \frac{ikA}{\omega} J_1(kr).$$

Z druhé rovnici dostaneme A např. užitím Stokesovy věty na smyčku ve tvaru kružnice o poloměru R v rovině kolmé k ose z drátu

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \frac{J_1(kr)}{J_1(kR)}$$

a po dosazení i

$$E(r) = \frac{I}{2\pi \sigma R^2} \frac{kR J_0(kr)}{J_1(kR)}.$$

⁹viz https://en.wikipedia.org/wiki/Bessel_function

Pro $k \rightarrow 0$ dostaneme

$$E(r) = \frac{I}{\pi\sigma R^2}, \quad B(r) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}.$$

Pro $k \rightarrow \infty$ dostaneme v blízkosti $r = R$ uvnitř vodiče (tedy $r < R$) z asymptotického rozvoje Besselových funkcí

$$J_n(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left[z - \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]$$

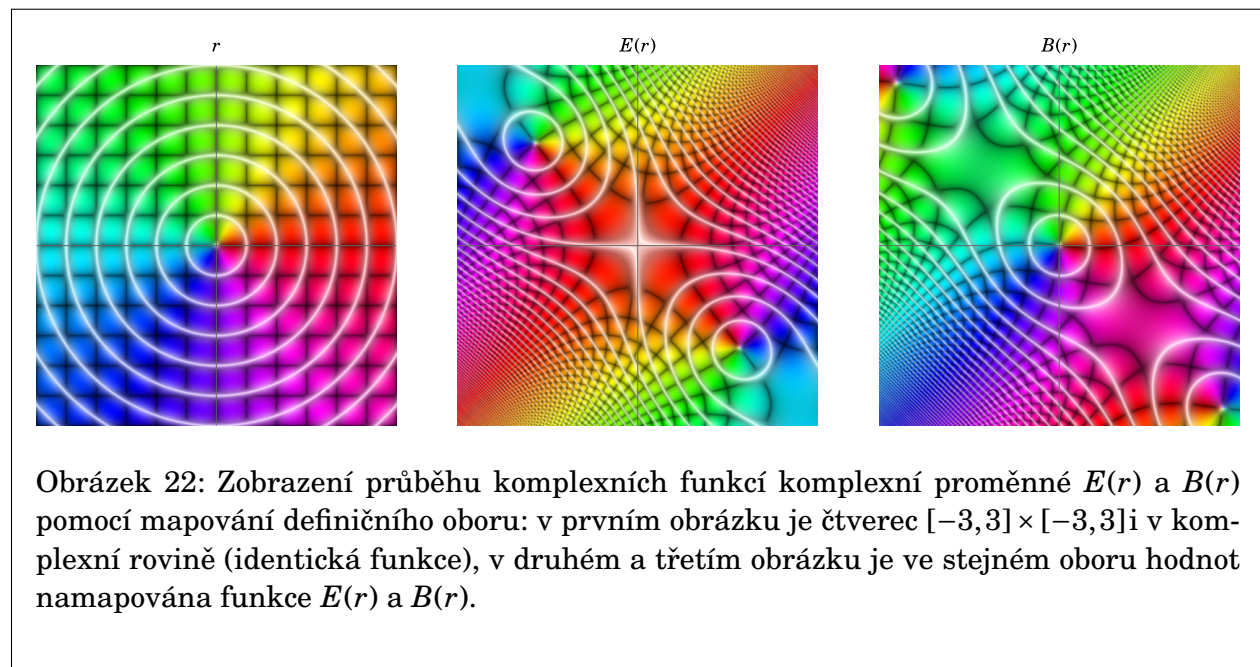
přibližně

$$\frac{E(r)}{B(r)} \propto \exp\left[\sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}}(R - r)\right].$$

Elektromagnetické pole pronikne tedy přibližně do hloubky

$$\sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma}},$$

než se e-krát zmenší jeho velikost.



6.2. Vlnovod a rezonátor. Uvažme Maxwellovy rovnice v jednoduchém dielektrickém a magnetickém prostředí a vyjádřeme obecnou časovou závislost elektrické intenzity a mag-

netické indukce jako superpozici harmonických závislostí s různými frekvencemi. Potom

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) e^{-i\omega t}$$

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathbf{B}(\omega, \mathbf{r}) e^{-i\omega t},$$

kde Fourierovy komponenty rozlišíme podle výskytu úhlové frekvence ω . Po dosazení do Maxwellových rovnic ve vakuu dostaneme

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) &= i\omega \mathbf{B}(\omega, \mathbf{r}) & \nabla \cdot \mathbf{B}(\omega, \mathbf{r}) &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B}(\omega, \mathbf{r}) &= -i\epsilon\mu\omega \mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) & \nabla \cdot \mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) &= 0. \end{aligned}$$

Po dosazení a úpravě pomocí $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - \Delta \mathbf{V}$ dostaneme pro elektrickou intenzitu i magnetickou indukci stejnou tzv. Helmholtzovu rovnici

$$(\Delta + \mu\epsilon\omega^2) \begin{pmatrix} \mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) \\ \mathbf{B}(\omega, \mathbf{r}) \end{pmatrix} = 0.$$

Uvažujme napřed vlnovod, jehož osu zvolme jako osu z souřadnic a provedme Fourierovu transformaci pro souřadnici z ,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) &= \int_{-\infty}^{\infty} dk \mathbf{E}(\omega, k, \mathbf{r}_t) e^{ikz} \\ \mathbf{B}(\omega, \mathbf{r}) &= \int_{-\infty}^{\infty} dk \mathbf{B}(\omega, k, \mathbf{r}_t) e^{ikz}, \end{aligned}$$

kde \mathbf{r}_t je dvojrozměrný vektor transverzální k ose z . Dostaneme

$$(\Delta_t + \mu\epsilon\omega^2 - k^2) \begin{pmatrix} \mathbf{E}(\omega, k, \mathbf{r}_t) \\ \mathbf{B}(\omega, k, \mathbf{r}_t) \end{pmatrix} = 0,$$

kde Δ_t je transverzální část Laplaceova operátoru. Je rovněž účelné rozložit \mathbf{E} a \mathbf{B} na složky rovnoběžné a kolmé k ose z

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_z + \mathbf{E}_t = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_z) \mathbf{e}_z + (\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}) \times \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_z + \mathbf{B}_t = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_z) \mathbf{e}_z + (\mathbf{e}_z \times \mathbf{B}) \times \mathbf{e}_z.$$

Transverzální části \mathbf{E} a \mathbf{B} lze spočítat pomocí průmětů na osu z . Máme

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t &= \frac{1}{\mu\epsilon\omega^2 - k^2} (ik \nabla_t B_z + i\mu\epsilon\omega \mathbf{e}_z \times \nabla_t E_z) \\ \mathbf{B}_t &= \frac{1}{\mu\epsilon\omega^2 - k^2} (ik \nabla_t E_z - i\omega \mathbf{e}_z \times \nabla_t B_z). \end{aligned}$$

Ideální vlnovod je dutý válec s podstavou S , jehož stěny jsou dokonale vodivé, \mathbf{n} označuje (transverzální) vektor vnější normály k ∂S . Proto okrajové podmínky jsou $\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0$ a $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$. Odtud dostaneme $E_z(\partial S) = 0$ a $\partial B_z / \partial n(\partial S) = 0$. Protože okrajové podmínky pro E_z resp. B_z jsou Dirichletovy resp. Neumannovy, nelze je splnit současně. Máme tedy následující případy

TM transverzální magnetické pole: zde je $B_z = 0$ a $E_z(\partial S) = 0$.

TE transverzální elektrické pole: zde je $E_z = 0$ a $\partial B_z / \partial n(\partial S) = 0$

TEM transverzální elektromagnetické pole: zde je $E_z = B_z = 0$.

Pro TEM dostaneme $k^2 = \mu\epsilon\omega^2$ a transverzální složky polí splňují Laplaceovu rovnici na S . Splnění okrajových podmínek pro jednoduše souvislou S vede (viz důkaz jednoznačnosti řešení elektrostatické úlohy) k identicky nulovému řešení. Naopak pro průřezy, jež nejsou jednoduše souvislé (např. koaxiální kabel), je takový způsob šíření elektromagnetických vln dobře možný.

Pro TM vlny máme

$$\mathbf{B}_t = \frac{\mu\epsilon\omega}{k} \mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_t, \quad \mathbf{E}_t = \frac{ik}{\gamma^2} \nabla_t E_z,$$

takže pro E_z platí dvojrozměrná Helmholtzova rovnice na S

$$(\Delta_t + \gamma^2) E_z = 0, \quad \text{s okrajovou podmínkou } E_z(\partial S) = 0.$$

Pro TE vlny máme

$$\mathbf{E}_t = -\frac{\omega}{k} \mathbf{e}_z \times \mathbf{B}_t, \quad \mathbf{B}_t = \frac{ik}{\gamma^2} \nabla_t B_z,$$

takže pro B_z platí dvojrozměrná Helmholtzova rovnice na S

$$(\Delta_t + \gamma^2) B_z = 0, \quad \text{s okrajovou podmínkou } \frac{\partial B_z}{\partial n}(\partial S) = 0.$$

V obou případech máme $\gamma^2 = \mu\epsilon\omega^2 - k^2$. Z matematického hlediska tedy řešíme úlohu pro vlastní hodnoty pro transverzální Laplaceův operátor s Dirichletovými (TM) nebo Neumannovými (TE) okrajovými podmínkami.

Obecně lze ukázat, že $\gamma^2 \geq 0$. Heuristicky můžeme argumentovat takto: aby byly splněny okrajové podmínky, musí vlastní funkce oscilovat. Bude existovat zdola omezené spektrum vlastních hodnot

$$0 \leq \gamma_0^2 \leq \gamma_1^2 \leq \dots \leq \gamma_\ell^2 \leq \dots$$

Pro Dirichletovu úlohu je první vlastní hodnota $\gamma_0^2 > 0$, naopak pro Neumannovu úlohu je $\gamma_0^2 = 0$. Dá se ukázat, že platí tzv. proplétající nerovnosti

$$\gamma_{\ell-1}^{\text{Neumann}} \leq \gamma_\ell^{\text{Dirichlet}}, \quad \gamma_\ell^{\text{Neumann}} \leq \gamma_\ell^{\text{Dirichlet}}.$$

Pro vlnové číslo dostáváme

$$k_\ell = \mu\epsilon\omega^2 - \gamma_\ell^2.$$

Řešení pro dané ℓ se nazývá (TM nebo TE) mód.

Příklad 56. [5 bodů] Diskutujte fázovou a grupovou rychlost vln ve vlnovodu.

Příklad 57. [10+10 bodů] Spočtěte vlastní funkce a vlastní hodnoty pro vlnovod obdélníkového průřezu, tj. $S = [0, a] \times [0, b]$ pro TM i TE vlny.

Řešení: Pro TM módy získáme řešením Dirichletovy úlohy pro E_z

$$E_z^{mn} = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad \gamma_{mn}^2 = \frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}.$$

Např. pro $a = 2$ a $b = 1$ dostaneme posloupnost vlastních hodnot

ℓ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
γ_ℓ^2/π^2	$\frac{5}{4}$	2	$\frac{13}{4}$	$\frac{17}{4}$	5	5	$\frac{25}{4}$	$\frac{29}{4}$	8	$\frac{37}{4}$
(m, n)	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(1, 2)	(4, 1)	(2, 2)	(3, 2)	(5, 1)	(4, 2)	(1, 3)

Ze znalosti E_z již můžeme spočítat \mathbf{E}_t a z něj \mathbf{B}_t .

Pro TE módy získáme řešením Neumannovy úlohy pro B_z kromě konstantního řešení $B_z = \text{konst.}$ ještě

$$B_z^{mn} = \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}, \quad \gamma_{mn}^2 = \frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}.$$

Např. pro $a = 2$ a $b = 1$ dostaneme posloupnost vlastních hodnot (v případě obdélníkové podstavy S se jedná jen o posunutou předchozí posloupnost)

ℓ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
γ_ℓ^2/π^2	0	$\frac{5}{4}$	2	$\frac{13}{4}$	$\frac{17}{4}$	5	5	$\frac{25}{4}$	$\frac{29}{4}$	8
(m, n)	–	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(1, 2)	(4, 1)	(2, 2)	(3, 2)	(5, 1)	(4, 2)

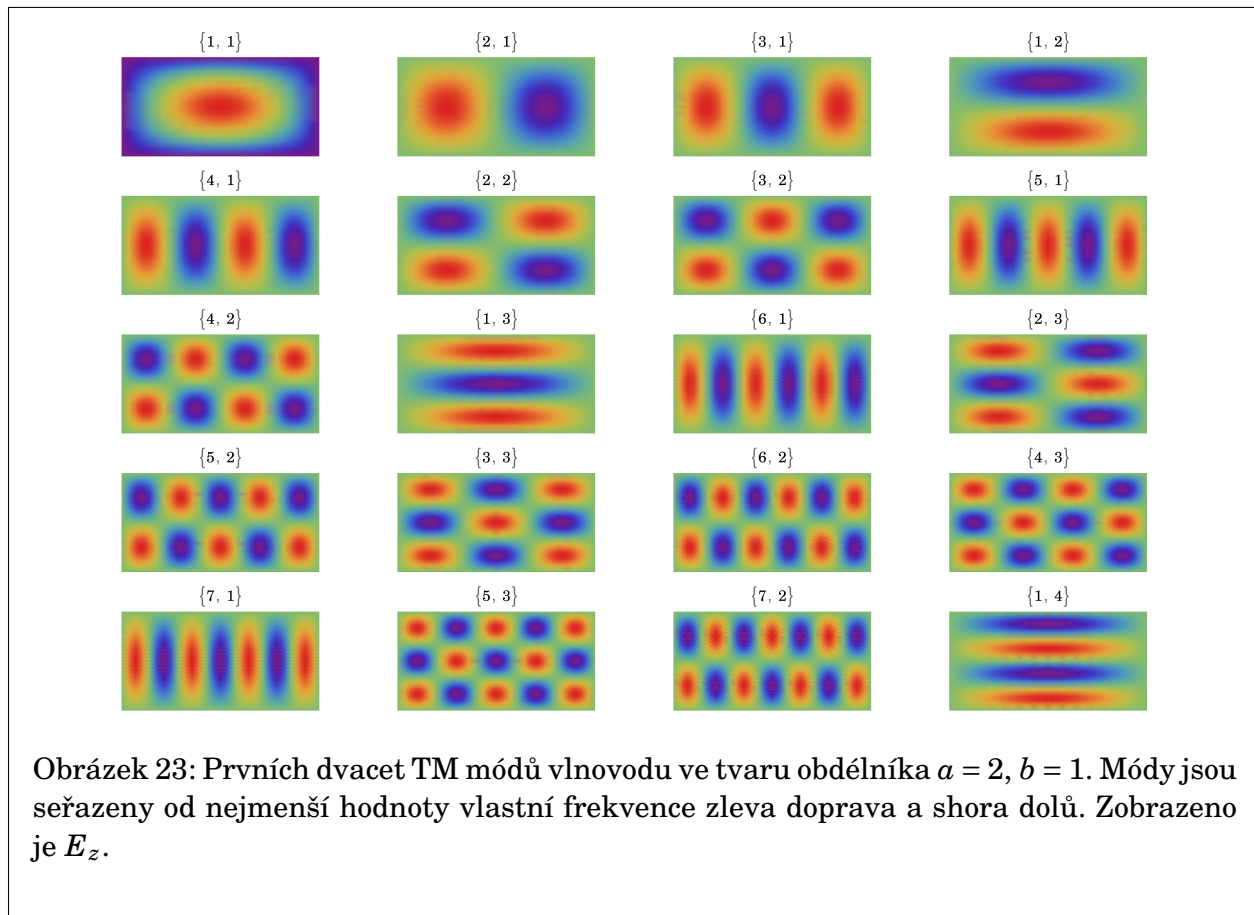
Ze znalosti B_z již můžeme spočítat \mathbf{B}_t a z něj \mathbf{E}_t .

Koeficienty lineární kombinace jednotlivých TM a TE módů můžeme získáme z počátečních podmínek.

Příklad 58. [5 bodů] Spočtěte Poyntingův vektor $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ pro (m, n) -tý TM a TE mód ve vlnovodu obdélníkového průřezu.

Nyní pro vlnovod obdélníkového průřezu můžeme vodiči uzavřít i stěny $z = 0$ a $z = c$, čímž získáme kvádrový rezonátor. Obecný rezonátor je dutina, jejíž hranice je tvořena (dokonalým) vodičem, uvnitř které se nachází elektromagnetické pole. Spočteme si módy pro kvádrový rezonátor: Vlastní funkce pro Helmholtzovu rovnici pro souřadnici z musí být stojaté vlny, proto E_z pro TM (resp. B_z pro TE) je dáno jako lineární kombinace

$$\cos kz \quad \text{a} \quad \sin kz,$$



kde $k = p\pi/c$, $p \in \mathbb{N}_0$. Pro TM pole máme

$$E_z^{(m,n,p)} = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{p\pi z}{c}, \quad \omega_{mnp}^2 = \frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2} + \frac{p^2\pi^2}{c^2},$$

kde $(m, n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$. Úhlové frekvence ω_{mnp} jsou TM rezonanční frekvence kvádrového rezonátoru. Obdobně postupujeme pro TE módy a dostaneme

$$B_z^{(m,n,p)} = \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{p\pi z}{c}, \quad \omega_{mnp}^2 = \frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2} + \frac{p^2\pi^2}{c^2},$$

kde $(m, n, p) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}$.

Příklad 59. [40 bodů] Proveďte obdobnou analýzu pro vlnovod kruhového průřezu s poloměrem R . Spočítejte TM a TE módy pro válcový vlnovod a módy vlastních kmitů a rezonanční frekvence pro válcový rezonátor výšky h . Budete potřebovat vlastnosti Besselových funkcí celočíselného argumentu.¹⁰

¹⁰https://en.wikipedia.org/wiki/Bessel_function

6.3. Retardované potenciály. Pro elektromagnetické pole vyvolané lokalizovanou hustotou náboje a proudu použijeme rovněž vyjádření Maxwellových rovnic pomocí Fourierovy transformace časové proměnné. Pro hustotu náboje a proudu máme

$$\rho(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \rho(\omega, \mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathbf{j}(\omega, \mathbf{r}) e^{-i\omega t}.$$

Druhou sadu Maxwellových rovnic můžeme s využitím Lorenzovy kalibrační podmínky $\partial A^i / \partial x^i = 0$ psát jako

$$\eta^{ij} \frac{\partial^2 A^k}{\partial x^i \partial x^j} = \mu_0 j^k.$$

V trojrozměrném značení dostaneme

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi(t, \mathbf{r})}{\partial t^2} - \Delta \Phi(t, \mathbf{r}) = \frac{\rho(t, \mathbf{r})}{\epsilon}, \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}(t, \mathbf{r})}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \mu \mathbf{j}(t, \mathbf{r}).$$

Pro časové Fourierovy komponenty potom dostaneme nehomogenní Helmholtzovy rovnice

$$\frac{\omega^2}{c^2} \Phi(\omega, \mathbf{r}) + \Delta \Phi(\omega, \mathbf{r}) = -\frac{\rho(\omega, \mathbf{r})}{\epsilon}, \quad \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{A}(\omega, \mathbf{r}) + \Delta \mathbf{A}(\omega, \mathbf{r}) = -\mu \mathbf{j}(\omega, \mathbf{r})$$

pro Φ a kartézské složky vektorového potenciálu \mathbf{A} . Řešme tedy nyní lineární nehomogenní rovnici

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \psi(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) = \int d^3 \mathbf{r}' f(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Stačí nám zjistit řešení pro speciální pravou stranu $\delta(\mathbf{r})$. Obecné řešení dostaneme jako "lineární kombinaci" posunutých takových speciálních řešení. Provedme proto prostorovou Fourierovu transformaci rovnice

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \psi(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}).$$

Po dosazení

$$\psi(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{k} \psi(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

dostaneme pomocí

$$\delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

algebraickou rovnicí

$$\left(-\|\mathbf{k}\|^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \psi(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3}.$$

Odtud již máme

$$\psi(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{\frac{\omega^2}{c^2} - \|\mathbf{k}\|^2}.$$

Nyní musíme provést zpětnou Fourierovu transformaci a máme

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{k} \frac{1}{\frac{\omega^2}{c^2} - \|\mathbf{k}\|^2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}.$$

Integrál spočteme ve sférických souřadnicích, u nevlastního integrálu vezmeme jeho hlavní hodnotu

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \|\mathbf{k}\|^2 d\|\mathbf{k}\| \int_0^\pi d(\cos\theta) \frac{1}{\frac{\omega^2}{c^2} - \|\mathbf{k}\|^2} e^{i\|\mathbf{k}\|\|\mathbf{r}\|\cos\theta} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \|\mathbf{k}\|^2 d\|\mathbf{k}\| \frac{1}{\frac{\omega^2}{c^2} - \|\mathbf{k}\|^2} \frac{2\sin\|\mathbf{k}\|\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{k}\|\|\mathbf{r}\|} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\cos\frac{\omega}{c}\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{r}\|} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\exp\left(i\frac{\omega}{c}\|\mathbf{r}\|\right)}{\|\mathbf{r}\|}. \end{aligned}$$

Vidíme, že pro $\omega \rightarrow 0$ dostaneme Coulombův zákon. Pro obecnou pravou stranu Helmholtzovy rovnice potom dostaneme

$$\psi(\omega, \mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{r}' \frac{f(\omega, \mathbf{r}') e^{i\frac{\omega}{c}\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|}}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|}.$$

Po zpětné časové Fourierově transformaci dostaneme

$$\psi(t, \mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^\infty d\omega \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{r}' \frac{f(\omega, \mathbf{r}') e^{i\frac{\omega}{c}\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|}}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|} e^{-i\omega t} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{r}' \frac{f\left(t - \frac{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|}{c}, \mathbf{r}'\right)}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|}$$

a specificky pro skalární a vektorový potenciál máme

$$\begin{aligned} \Phi(t, \mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{r}' \frac{\rho\left(t - \frac{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|}{c}, \mathbf{r}'\right)}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|}, \\ \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) &= \frac{\mu}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{r}' \frac{\mathbf{j}\left(t - \frac{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|}{c}, \mathbf{r}'\right)}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|}. \end{aligned}$$

Těmto potenciálům říkáme retardované potenciály, protože potenciál v čase t a místě \mathbf{r} je určen zdrojem ve všech místech \mathbf{r}' , z kterých se do bodu \mathbf{r} dostane rychlostí světla $c = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ v daném prostředí. Praktický výpočet hodnot polí daleko od nábojů je často výhodné provést následovně. Napřed spočteme vektorový potenciál \mathbf{A} . S jeho pomocí potom spočteme magnetickou indukci $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ a z ní elektrickou intenzitu pomocí Maxwellovy rovnice pro časově fourierovskými transformované složky $\mathbf{E} = c^2/i\omega \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$. Poslední rovnice platí tam, kde je nulová hustota proudu.

6.4. Aproximace dalekého pole. Vyjádříme časovou Fourierovu složku vektorového potenciálu

$$\mathbf{A}(\omega, \mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{r}' \frac{\mathbf{j}(\omega, \mathbf{r}') e^{i\frac{\omega}{c}\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|}}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|}$$

aproximativně. Aproximaci použijeme na výraz $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|$, který se vyskytuje jednak v argumentu exponenciály, ale také ve jmenovateli. Ve jmenovateli budeme aproximovat $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| \approx \|\mathbf{r}\|$. V exponenciálním faktoru v čitateli vezmeme v úvahu ještě další člen rozvoje

$$\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| \approx \|\mathbf{r}\| \left(1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}\|^2} + \dots \right).$$

Po dosazení přibližně dostaneme

$$\mathbf{A}(\omega, \mathbf{r}) \approx \frac{\mu}{4\pi\|\mathbf{r}\|} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{r}' \mathbf{j}(\omega, \mathbf{r}') e^{i\frac{\omega}{c}\|\mathbf{r}\|(1-\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'/\|\mathbf{r}\|^2)} = \frac{\mu e^{i\frac{\omega}{c}\|\mathbf{r}\|}}{4\pi\|\mathbf{r}\|} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{r}' \mathbf{j}(\omega, \mathbf{r}') e^{-i\frac{\omega}{c}\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'/\|\mathbf{r}\|}.$$

Odtud již srovnáním dostaneme vyjádření pomocí časově i prostorově fourierovsky transformované hustoty proudu

$$\mathbf{A}(\omega, \mathbf{r}) \approx \frac{2\pi^2\mu e^{i\frac{\omega}{c}\|\mathbf{r}\|}}{\|\mathbf{r}\|} \mathbf{j}\left(\omega, \frac{\omega}{c} \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}\right).$$

6.5. m -půlvlnná lineární anténa. Uvažme tenký vodivý drát, jehož délka je celočíselným m -násobkem poloviny vlnové délky stojaté vlny hustoty elektrického proudu, který je zde přítomen

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = I\delta(x)\delta(y)Y(\ell/2 - z)Y(\ell/2 + z) \frac{\cos\left[m\pi\left(\frac{z}{\ell} - 1\right)\right]}{\sin\left[m\pi\left(\frac{z}{\ell} - 1\right)\right]} e^{-i\Omega t} \mathbf{e}_z.$$

Pro \cos jsou na koncích antény kmitny, pro \sin jsou tam uzly. Potom

$$\mathbf{j}(\omega, \mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \delta(\omega - \Omega) I \delta(x)\delta(y)Y(\ell/2 - z)Y(\ell/2 + z) \frac{\cos\left[m\pi\left(\frac{z}{\ell} - 1\right)\right]}{\sin\left[m\pi\left(\frac{z}{\ell} - 1\right)\right]} \mathbf{e}_z$$

a s využitím sférického polárního úhlu θ máme

$$\mathbf{j}(\omega, k_x \mathbf{e}_x + k_y \mathbf{e}_y + k_z \mathbf{e}_z) = \frac{I\ell\delta(\omega - \Omega)\mathbf{e}_z}{\pi(k^2\ell^2 - m^2\pi^2)} \begin{cases} (k\ell \cos \frac{m\pi}{2} \sin \frac{k\ell}{2} + m\pi \cos \frac{k\ell}{2} \sin \frac{m\pi}{2}) \\ i(k\ell \sin \frac{m\pi}{2} \cos \frac{k\ell}{2} + m\pi \sin \frac{k\ell}{2} \cos \frac{m\pi}{2}) \end{cases},$$

což po dosazení dává

$$\mathbf{A}(\omega, \mathbf{r}) = \frac{2\pi\mu I\ell\delta(\omega - \Omega)\mathbf{e}_z e^{i\frac{\omega}{c}\|\mathbf{r}\|}}{\|\mathbf{r}\|(k^2\ell^2 - m^2\pi^2)} \begin{cases} (k\ell \cos \frac{m\pi}{2} \sin \frac{k\ell}{2} + m\pi \cos \frac{k\ell}{2} \sin \frac{m\pi}{2}) \\ i(k\ell \sin \frac{m\pi}{2} \cos \frac{k\ell}{2} + m\pi \sin \frac{k\ell}{2} \cos \frac{m\pi}{2}) \end{cases},$$

kde

$$k = \frac{\Omega}{c} \cos \theta \quad \text{a} \quad \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_r \cos \theta - \mathbf{e}_\theta \sin \theta.$$

Pro vektorový potenciál ve sférických souřadnicích $r = \|\mathbf{r}\|$ tedy celkem máme

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{\mu I\ell(\mathbf{e}_r \cos \theta - \mathbf{e}_\theta \sin \theta) e^{i\Omega(\frac{r}{c} - t)}}{r(k^2\ell^2 - m^2\pi^2)} \begin{cases} (k\ell \cos \frac{m\pi}{2} \sin \frac{k\ell}{2} + m\pi \cos \frac{k\ell}{2} \sin \frac{m\pi}{2}) \\ i(k\ell \sin \frac{m\pi}{2} \cos \frac{k\ell}{2} + m\pi \sin \frac{k\ell}{2} \cos \frac{m\pi}{2}) \end{cases}.$$

A toho již lze spočíst $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, dále $\mathbf{E} = \frac{c^2}{i\Omega} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$ a Poyntingův vektor $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$.

Příklad 60. [15 bodů] Pomocí počítače spočítejte a graficky zobrazte $\|\mathbf{S}\|$ v polárních souřadnicích (r, θ) (na souřadnici φ nic přímo nezávisí) pro obecnou m -půlvlnnou lineární anténu.

6.6. Dipólová anténa. Nejhrubší možnou aproximaci provedeme tak, že jak v čitateli, tak i ve jmenovateli nahradíme $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|$ pouze $\|\mathbf{r}\| = r$. Dostaneme takto

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi\|\mathbf{r}\|} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{r}' \mathbf{j}\left(t - \frac{\|\mathbf{r}\|}{c}, \mathbf{r}'\right)$$

a po přechodu od spojitého rozložení náboje k bodovým nábojům dostaneme

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi\|\mathbf{r}\|} \sum_I q_I \mathbf{v}_I \left(t - \frac{\|\mathbf{r}\|}{c}\right) = \frac{\mu}{4\pi\|\mathbf{r}\|} \frac{d}{dt} \sum_I q_I \mathbf{r}_I \left(t - \frac{\|\mathbf{r}\|}{c}\right),$$

což můžeme dále napsat pomocí dipólového momentu \mathbf{p} v čase $t - r/c$ jako

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi\|\mathbf{r}\|} \frac{d}{dt} \mathbf{p} \left(t - \frac{\|\mathbf{r}\|}{c}\right).$$

Ve velké vzdálenosti od dipólu ponecháme pouze členy obsahující $1/r$ a nižší mocniny zanedbáme. Dostaneme

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \approx \frac{\mu}{4\pi\|\mathbf{r}\|} \frac{d}{dt} \nabla \times \mathbf{p} \left(t - \frac{\|\mathbf{r}\|}{c}\right) = -\frac{\mu}{4\pi r^2 c} \times \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{p} \left(t - \frac{r}{c}\right)$$

a protože v tak veliké vzdálenosti od dipólu se jedná vlastně o rovinnou vlnu, kde $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ a $\mathbf{E} \perp \mathbf{r}$, $c\|\mathbf{B}\| = \|\mathbf{E}\|$ máme s označením

$$\mathbf{p} \left(t - \frac{r}{c}\right) = \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{p} \left(t - \frac{r}{c}\right) \times \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}$$

spočteny všechny relevantní fyzikální veličiny:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{\mu_0}{4\pi r} \mathbf{p} \left(t - \frac{r}{c}\right) \times \mathbf{e}_r & \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi r c} \mathbf{p} \left(t - \frac{r}{c}\right) \\ W &= \frac{\mu}{(4\pi c r)^2} \left\| \mathbf{p} \left(t - \frac{r}{c}\right) \right\|^2 & \mathbf{S} &= \frac{\mu}{(4\pi r)^2 c} \left\| \mathbf{p} \left(t - \frac{r}{c}\right) \right\|^2 \mathbf{e}_r. \end{aligned}$$

Příklad 61. [5 bodů] Spočteme, kolik energie vyzáří za jeden oběh dipólově bodový náboj q pozorovaný ze vzdálenosti r , pohybující se rovnoměrně po kružnici o poloměru $a \ll r$ s úhlovou frekvencí ω . Máme $\mathbf{p}(t) = aq(\mathbf{e}_x \cos \omega t + \mathbf{e}_y \sin \omega t)$. Dále dostaneme

$$\|\mathbf{p}(t)\|^2 = a^2 q^2 \omega^4 \left(1 - \frac{xy}{r^2} \sin 2\omega t\right).$$

Nakonec spočteme, kolik energie projde sférou S o poloměru r a středem v počátku soustavy souřadnic za jednotku času, tj.

$$\iint_S dS \frac{\mu}{(4\pi r)^2 c} a^2 q^2 \omega^4 \left[1 - \frac{xy}{r^2} \sin 2\omega \left(t - \frac{r}{c}\right)\right] = \frac{\mu}{4\pi c} a^2 q^2 \omega^4,$$

což vyjde po parametrizaci S sférickými souřadnicemi. Za jeden oběh se dipólově vyzáří energie

$$\frac{\mu}{2c} a^2 q^2 \omega^3.$$

Ověřte, že výsledek má fyzikální rozměr energie.

Příklad 62. [20 bodů] Spočtěte v dipólové aproximaci vektorový potenciál, elektrickou intenzitu, magnetickou indukci a Poyntingův vektor pro půlvlnnou anténu s kmitnými na koncích.

7. Geometrická optika

7.1. Paraxiální aproximace. Budeme uvažovat, že osa z je osou, podél které se šíří v okolí této osy lokalizovaná elektromagnetická vlna. Můžeme proto předpokládat řešení Helmholtzovy rovnice

$$\Delta \psi(\omega, \mathbf{r}) + \frac{\omega^2}{c^2} \psi(\omega, \mathbf{r}) = 0$$

ve tvaru

$$\psi(\omega, \mathbf{r}) = \Psi(\omega, \mathbf{r}_\perp, z) e^{ikz},$$

kde $\mathbf{r}_\perp = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$ a $k = c\omega$. Po dosazení dostaneme

$$\Delta_\perp \Psi(\omega, \mathbf{r}_\perp, z) + 2ik \frac{\partial \Psi(\omega, \mathbf{r}_\perp, z)}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Psi(\omega, \mathbf{r}_\perp, z)}{\partial z^2} = 0.$$

V paraxiální aproximaci předpokládáme, že platí

$$k \frac{\partial \Psi}{\partial z} \gg \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}$$

a dostáváme rovnici

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial z} = -\frac{1}{2k} \Delta_\perp \Psi.$$

Obecným řešením takové rovnice je vlnové klubko

$$\Psi(\mathbf{r}_\perp, z) = \iint d^2 \mathbf{r}'_\perp \hat{\Psi}(\mathbf{r}'_\perp) \exp [i(\mathbf{r}'_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp - \|\mathbf{r}'_\perp\|^2 z / 2k)]$$

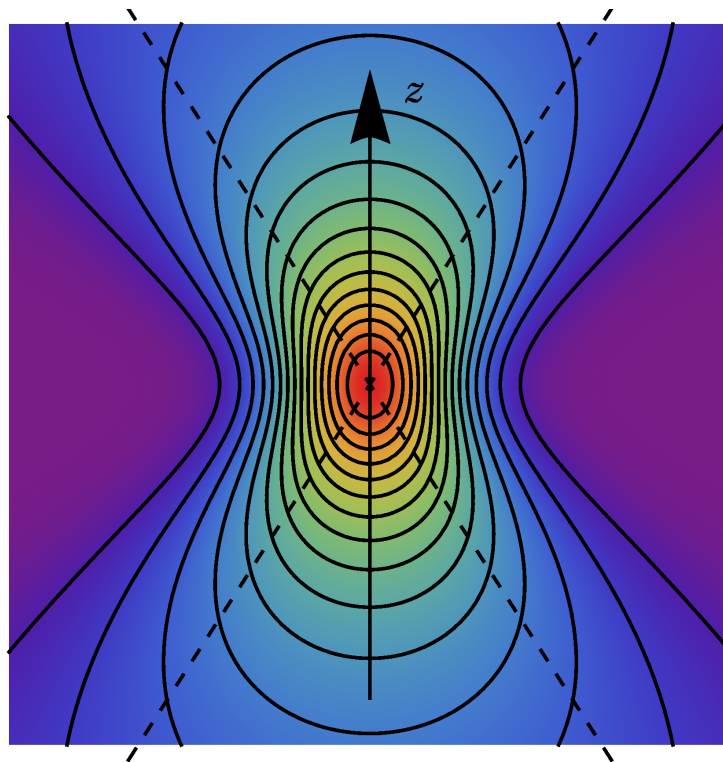
Abychom dostali paprskům podobná řešení, musíme předpokládat, že amplitudy $\hat{\Psi}(\mathbf{r}_\perp)$ rychle klesají v závislosti na $\|\mathbf{r}_\perp\|$.

7.2. Gaussovské svazky. Nejdůležitější se prakticky ukazují být gaussovské svazky, kde

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}_\perp) = w_0^2 \exp\left(-\frac{1}{4}w_0^2\|\mathbf{r}_\perp\|^2\right).$$

Ve válcových souřadnicích (ρ, φ, z) potom v paraxiální aproximaci řešení získáme jako

$$\psi(t, \rho, z) = \frac{4\pi w_0^2}{w_0^2 + 2iz/k} \exp\left[i(kz - \omega t) - \frac{\rho^2}{w_0^2 + 2iz/k}\right].$$



Obrázek 24: Gaussovský svazek šířící se podél osy z

7.3. Rovnice pro eikonál. Vyjdeme z rovnic elektromagnetického pole platných v dielektrících, kde se nevyskytují volné náboje

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= 0 & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{aligned}$$

a konstitutivních relací, které budeme předpokládat ve tvaru

$$\mathbf{D}(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^t \epsilon(t-t', \mathbf{r}) \mathbf{E}(t', \mathbf{r}) dt'$$

$$\mathbf{H}(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^t \mu^{-1}(t-t', \mathbf{r}) \mathbf{B}(t', \mathbf{r}) dt'.$$

Odezvu mezi poli budeme považovat za lineární, materiál za izotropní byť nehomogenní, pole mohou záviset na hodnotách ve stejném místě v předchozích časech. Budeme předpokládat harmonickou závislost polí obdobně jako v odstavci 6.2. Rovnice potom můžeme psát jako

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [\epsilon(\omega, \mathbf{r}) \mathbf{E}(\omega, \mathbf{r})] &= 0 & \nabla \cdot [\mu(\omega, \mathbf{r}) \mathbf{H}(\omega, \mathbf{r})] &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H}(\omega, \mathbf{r}) &= -i\omega \epsilon(\omega, \mathbf{r}) \mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) & \nabla \times \mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) &= i\omega \mu(\omega, \mathbf{r}) \mathbf{H}(\omega, \mathbf{r}). \end{aligned}$$

Komplexní vektorová pole zapíšeme jako pomalu se měnící amplitudy a fáze ¹¹

$$\mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) = \mathbf{e}(\omega, \mathbf{r}) \exp[i\omega S(\omega, \mathbf{r})], \quad \mathbf{H}(\omega, \mathbf{r}) = \mathbf{h}(\omega, \mathbf{r}) \exp[i\omega S(\omega, \mathbf{r})].$$

Závislost na ω nebudeme v dalším explicitně vypisovat. Dostaneme

$$\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{e} e^{i\omega S}) = (\epsilon \nabla \cdot \mathbf{e} + \mathbf{e} \cdot \nabla \epsilon + i\omega \epsilon \mathbf{e} \cdot \nabla S) e^{i\omega S}$$

a

$$\nabla \times (\mathbf{e} e^{i\omega S}) = (\nabla \times \mathbf{e} + i\omega \nabla S \times \mathbf{e}) e^{i\omega S}$$

a analogické rovnice pro \mathbf{h} . Po dosazení do Maxwellových rovnic dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{e} \cdot \nabla S &= -\frac{1}{i\omega} (\mathbf{e} \cdot \nabla \ln \epsilon + \nabla \cdot \mathbf{e}) & \mathbf{h} \cdot \nabla S &= -\frac{1}{i\omega} (\mathbf{h} \cdot \nabla \ln \mu + \nabla \cdot \mathbf{h}) \\ \nabla S \times \mathbf{h} + \epsilon \mathbf{e} &= -\frac{1}{i\omega} \nabla \times \mathbf{h} & \nabla S \times \mathbf{e} - \mu \mathbf{h} &= -\frac{1}{i\omega} \nabla \times \mathbf{e}. \end{aligned}$$

Nyní provedeme aproximaci pro vysoké frekvence $\omega \rightarrow \infty$ a dostaneme přibližně

$$\mathbf{e} \cdot \nabla S = 0 \qquad \mathbf{h} \cdot \nabla S = 0 \qquad (3)$$

$$\nabla S \times \mathbf{h} + \epsilon \mathbf{e} = 0 \qquad \nabla S \times \mathbf{e} - \mu \mathbf{h} = 0. \qquad (4)$$

Přesněji vzato, dostali bychom řadu v mocninách $1/\omega$, ze které jsme výše uvedli pouze nultý člen.

Příklad 63. Dokažte, že první dvě z předchozí čtveřice rovnic (3) plynou z druhé dvojice rovnic (4).

¹¹V tomto a dalším odstavci je S fáze, \mathbf{S} Poyntingův vektor, s délka oblouku, \mathbf{s} jednotkový tečný vektor. *Neplatí tedy*, že velikosti vektorů označujeme stejnými písmeny sázenými matematickou italicou namísto tučně!

Soustava homogenních rovnic (4) má netriviální řešení, právě když je s ní spojený determinant nulový, tj.

$$\|\nabla S\|^2 = \epsilon\mu = \frac{n^2}{c^2}.$$

Dále je vhodné přejít od S (jednotka v SI je s) k $cS \rightarrow S$ (jednotka v SI je m) a dostaneme tzv. rovnici pro eikonál S

$$\|\nabla S(\mathbf{r})\|^2 = n^2(\mathbf{r}).$$

Funkci n nazýváme *indexem lomu*. Plochy $S(\mathbf{r}) = \text{konst.}$ nazýváme geometrickými vlnoplochami. Dá se ukázat, že časová střední hustota energie ve výše provedené aproximaci je dána jako

$$\langle w \rangle = \frac{1}{4} [\mathbf{e}, \mathbf{h}^*, \nabla S]$$

a Poyntingův vektor je dán jako

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{e} \times \mathbf{h}^*).$$

Z aproximovaných Maxwellových rovnic dostaneme

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{n^2} \langle w \rangle \nabla S.$$

Vektor $\mathbf{s} = \frac{1}{n} \nabla S$ má jednotkovou velikost, jak plyne z rovnice pro eikonál. Vidíme tedy, že v aproximaci geometrické optiky je Poyntingův vektor kolmý na geometrickou vlnoplochu a časová střední hodnota hustoty energie se přenáší rychlostí $c/n\mathbf{s}$. Nyní lze definovat *paprsky*, jako orientované křivky kolmé na geometrické vlnoplochy. Uvažme parametrizaci $\mathbf{r}(s)$ délkou oblouku s , tj. $d\mathbf{r}/ds = \mathbf{s}$. Potom rovnici pro paprsky můžeme napsat jako

$$\nabla S = n \frac{d\mathbf{r}}{ds} = n\mathbf{s}.$$

Elektrické i magnetické amplitudy \mathbf{e} a \mathbf{h} jsou v každém bodě kolmé na paprsky.

7.4. Ekvivalence eikonálové aproximace a Fermatova principu. Pro změnu eikonálu podél paprsku můžeme psát

$$\frac{dS(\mathbf{r})}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \nabla S(\mathbf{r}) = n.$$

Obecně pro libovolnou křivku C zavedeme tzv. optickou délku

$$\int_C n(\mathbf{r}) ds$$

Optická délka *paprsku* mezi dvěma body \mathbf{r}_1 a \mathbf{r}_2 je potom

$$S(\mathbf{r}_2) - S(\mathbf{r}_1).$$

Dále dostáváme

$$0 = \nabla \times (\nabla S) = \nabla \times (n\mathbf{s}) = n\nabla \times \mathbf{s} + (\nabla n) \times \mathbf{s}.$$

Skalární součin rovnosti s vektorem \mathbf{s} dává

$$\mathbf{s} \cdot \nabla \times \mathbf{s} = 0,$$

což je podmínka pro to, aby vektorové pole \mathbf{s} bylo tečným vektorovým polem normální soustavy paprsků.

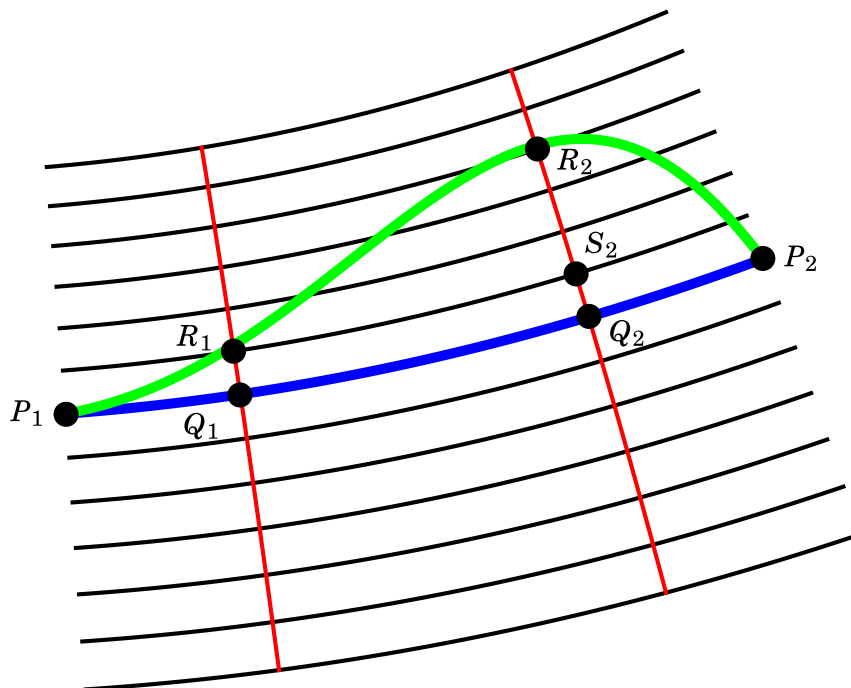
Ze Stokesovy věty dále okamžitě plyne, že integrál po uzavřené křivce

$$\oint n\mathbf{s} \cdot d\mathbf{r} = 0,$$

tzv. Lagrangeova integrální relace. Integrál

$$\int_{P_1}^{P_2} n\mathbf{s} \cdot d\mathbf{r}$$

tedy nezávisí na integrační cestě.



Obrázek 25: Fermatův princip: Paprsky, křivky, vlnoplochy

Nyní již můžeme přistoupit k důkazu tzv. Fermatova principu. Budeme uvažovat dráhu C paprsku $P_1Q_1Q_2P_2$ a libovolnou jinou křivku V spojující P_1 s P_2 . S označením dle obrázku budeme uvažovat trojúhelník $R_1R_2S_2$, na který aplikuje Lagrangeovu integrální relaci. Platí tedy

$$(n\mathbf{s} \cdot d\mathbf{r})_{R_1R_2} + (n\mathbf{s} \cdot d\mathbf{r})_{R_2S_2} - (nds)_{R_1S_2} = 0.$$

Druhý sčítanec na pravé straně je nulový, protože \mathbf{s} je kolmý na $d\mathbf{r}$. V prvním sčítanci můžeme využít Cauchyho-Schwarzovu nerovnost

$$(n\mathbf{s} \cdot d\mathbf{r})_{R_1R_2} \leq (nds)_{R_1R_2},$$

čímž dostáváme

$$(nds)_{R_1S_2} \leq (nds)_{R_1R_2}.$$

Dále uvážíme, že R_1 a Q_1 resp. S_2 a Q_2 leží vždy na stejné vlnoploše a tedy

$$(nds)_{R_1S_2} = (nds)_{Q_1Q_2}.$$

Odtud již máme

$$(nds)_{Q_1Q_2} \leq (nds)_{R_1R_2}.$$

a po integraci

$$\int_C nds \leq \int_V nds.$$

Příklad 64. [Fata morgana] Uvažujme prostředí, kde index lomu závisí na výšce nad povrchem. Často je to plyn (např. vzduch), jehož hustota i polarizovatelnost závisí na teplotě. Teplota vzduchu musí být vyšší u povrchu, index lomu musí růst s výškou. Vezměme tedy $n = n_0(1 + \kappa y)$, $\kappa > 0$. Potom s $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$ je

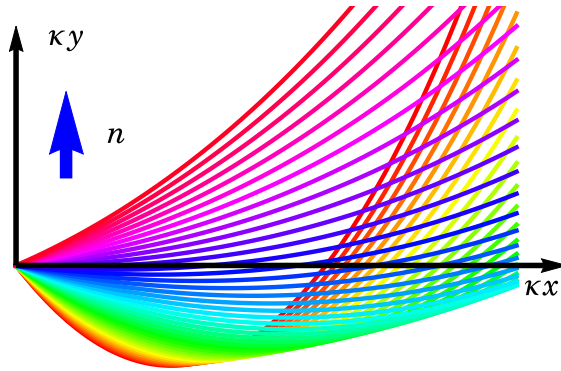
$$S[\mathbf{r}] = \int_{x_1}^{x_2} n_0(1 + \kappa y) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

Všimneme si, že integrand nezávisí na x a tedy výraz

$$\frac{(1 + \kappa y)n_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \text{konst.}$$

Odtud integrací s počáteční podmínkou $y(0) = 0$ (pozorovatel je v počátku soustavy souřadnic) dostaneme

$$\kappa y = (1 + C^2)[\cosh(\kappa x) - 1] + C \sinh(\kappa x).$$



Obrázek 26: Fata morgana s pozorovatelem v počátku soustavy souřadnic

8. Elektromagnetické obvody

Z rozměrové analýzy vyplývá, že pro kvazistacionární jevy se zanedbáním posuvného proudu musí platit $\omega\ell/c \ll 1$.

8.1. Drudeho model, Hallův jev, komplexní odpor vodiče. Předpokládáme, že nabitě nerelativistické bodové částice s nábojem q a hmotností m se sráží s pevnou mříží v nekorelované časy, přičemž průměrná doba mezi srážkami je τ . Pravděpodobnost srážky za čas dt je tedy nezávislá na čase a rovna

$$\frac{dt}{\tau}.$$

Dále předpokládáme, že střední hodnota hybnosti po každé srážce je $\langle \mathbf{p} \rangle = \mathbf{0}$. Pro přírůstek hybnosti za čas dt jsme odvodili v 3.2

$$d\langle \mathbf{p} \rangle = q(\mathbf{E} + \frac{1}{m}\langle \mathbf{p} \rangle \times \mathbf{B})dt.$$

Potom dostáváme

$$\langle \mathbf{p}(t+dt) \rangle = \left(\langle \mathbf{p}(t) \rangle + q(\mathbf{E} + \frac{1}{m}\langle \mathbf{p}(t) \rangle \times \mathbf{B})dt \right) \left(1 - \frac{dt}{\tau} \right) + \mathbf{0} \frac{dt}{\tau}.$$

Odtud dostaneme

$$\frac{d\langle \mathbf{p}(t) \rangle}{dt} + \frac{\langle \mathbf{p}(t) \rangle}{\tau} + \frac{q}{m}\langle \mathbf{p}(t) \rangle \times \mathbf{B} = q\mathbf{E}.$$

V ustáleném stavu je $d\langle \mathbf{p} \rangle/dt = 0$, dále mějme N nabitých částic v jednotce objemu. Potom hustota proudu je

$$\mathbf{j} = qN \frac{\langle \mathbf{p}(t) \rangle}{m}$$

a po dosažení dostáváme rovnici

$$\mathbf{E} + \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{B}}{qN} = \frac{m}{q^2 N \tau} \mathbf{j},$$

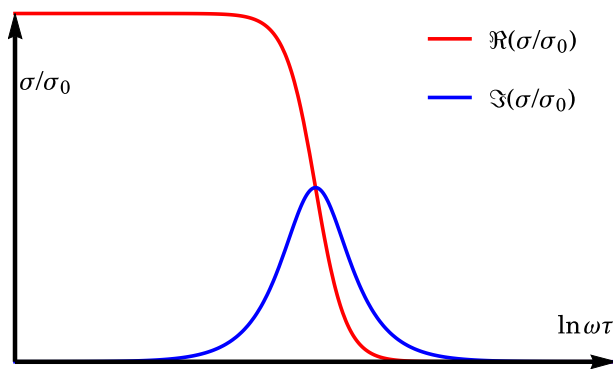
z čehož vidíme, že v konstantním magnetickém poli vzniká ve vodiči napětí ve směru kolmém k toku \mathbf{j} a magnetickému poli \mathbf{B} , tzv. *Hallův jev*.

V dalším uvažme $\mathbf{B} = 0$ a časově proměnné elektrické pole \mathbf{E} . Pro Fourierovy složky potom bude platit

$$-i\omega \mathbf{j}(\omega) + \frac{1}{\tau} \mathbf{j}(\omega) = \frac{Nq^2}{m} \mathbf{E}(\omega)$$

a odtud srovnáním

$$\mathbf{j}(\omega) = \sigma(\omega) \mathbf{E}(\omega), \quad \sigma(\omega) = \sigma_0 \frac{1 + i\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}, \quad \sigma_0 = \frac{Nq^2\tau}{m}.$$



Obrázek 27: Komplexní vodivost. Je vidět, že pro nízké frekvence je vodivost přibližně reálná.

Získáme Ohmův zákon s komplexní vodivostí v diferenciálním tvaru. Odtud za předpokladu, že uvnitř vodiče \mathbf{j} a \mathbf{E} nezávisí na místě, získáme Ohmův zákon v integrálním tvaru pro vodič délky ℓ a o průřezu A .

$$\ell \int_A \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = -A\sigma \int_{\ell} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r},$$

což dává

$$U(\omega) = \frac{\ell}{A\sigma(\omega)} I(\omega) = Z(\omega) I(\omega)$$

a máme $Z(\omega) = R$ reálné pro $\omega\ell/c \ll 1$.

8.2. Kapacita kondenzátoru. Vyjdeme z rovnice kontinuity náboje diferenciálním tvaru

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

a za ρ dosadíme $\nabla \cdot \mathbf{D}$. Dostaneme

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0.$$

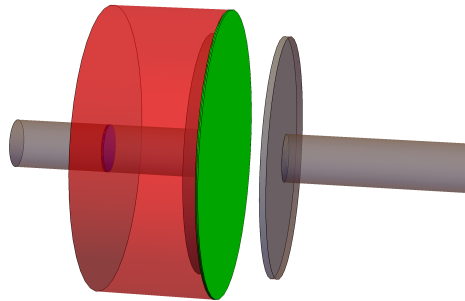
Pro Fourierovy složky potom máme

$$\nabla \cdot (\mathbf{j} - i\omega \mathbf{D}) = 0.$$

Uvažme integrační oblast na obrázku 28 a integrujme předchozí vztah s použitím Gaussovy věty. Dostaneme

$$I(\omega) = \int_s \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = i\omega \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = i\omega Q(\omega),$$

kde $Q(\omega)$ je celkový náboj na povrchu desky kondenzátoru. Celkem tedy máme $I(\omega) = i\omega Q(\omega)$.



Obrázek 28: Integrační oblast V je červený plný válec, nenulové příspěvky dávají integrály přes modrou část hranice s a zelenou část hranice S

U kondenzátoru můžeme psát Maxwellovy rovnice jako

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= 0 & \nabla \times \mathbf{H} &= i\omega \mathbf{D} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho. \end{aligned}$$

Kapacitu kondenzátoru proto můžeme v této aproximaci počítat stejně jako v elektrostatice, tj. $Q(\omega) = C(\omega)U(\omega)$, celkem tedy dostáváme

$$I(\omega) = i\omega C U(\omega).$$

8.3. Vzájemná a vlastní indukčnost. Uvažme dvě pevné cívky s v čase se měnícím proudem v druhé cívice. Napětí indukované v první cívice dostaneme

$$U_1 = i\omega \iint_{[1]} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{S}_1, \quad \iint_{[1]} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{S}_1 = \oint_{\partial[1]} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{r}_1, \quad \mathbf{A}_2 = \frac{\mu I_2}{4\pi} \oint_{\partial[2]} \frac{d\mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|}.$$

Po dosazení dostaneme

$$U_1 = i\omega M_{12} I_2(\omega), \quad M_{12} = -\frac{\mu}{4\pi} \oint_{\partial[1]} \oint_{\partial[2]} \frac{d\mathbf{r}_1 \cdot d\mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|}.$$

Záměnou [1] \leftrightarrow [2] dostaneme

$$U_2 = i\omega M_{21} I_1(\omega),$$

kde zjevně $M_{21} = M_{12}$. Stejně i změna magnetického indukčního toku v cívice 1 indukuje napětí v této cívice 1 (a obdobně pro cívku 2), tj.

$$U_1(\omega) = i\omega M_{11} I_1(\omega), \quad U_2(\omega) = i\omega M_{22} I_2(\omega).$$

Pro soustavu mnoha cívek dostaneme maticovou rovnici

$$\begin{pmatrix} U_1(\omega) \\ U_2(\omega) \\ \vdots \\ U_n(\omega) \end{pmatrix} = i\omega \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1n} \\ M_{21} & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ M_{n1} & M_{n2} & \cdots & M_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1(\omega) \\ I_2(\omega) \\ \vdots \\ I_n(\omega) \end{pmatrix},$$

případně pomocí maticového zápisu $U(\omega) = MI(\omega)$.

Nyní již můžeme zapsat rovnice pro soustavu n induktivně vázaných obvodů, jež můžeme chápat jako zobecnění druhého Kirchhoffova zákona. Pro každý obvod máme

$$U_a(\omega) = \sum_b Z_{ab}(\omega) I_b(\omega), \quad Z_{ab} = \left(R_a + \frac{i}{\omega C_a} \right) \delta_{ab} + i\omega M_{ab},$$

maticově $U(\omega) = Z(\omega)I(\omega)$. Rezonanční frekvence soustavy obvodů získáme pomocí podmínky pro existenci netriviálních řešení soustavy lineárních rovnic, tedy $\det Z(\omega) = 0$.

Můžeme od Fourierových složek přejít k časově závislým veličinám a formálně lze potom rovnice získat z kvadratického lagrangiánu

$$L = -\frac{1}{2} \sum_{a,b} M_{ab} \frac{dQ_a}{dt} \frac{dQ_b}{dt} - \frac{1}{2} \sum_a \frac{Q_a^2}{C_a} + \sum_a Q_a U_a$$

a disipativní funkce

$$R = \frac{1}{2} \sum_a R_a \left(\frac{dQ_a}{dt} \right)^2.$$

Platit musí Euler-Lagrangeovy rovnice s disipativní funkcí

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \frac{dQ_a}{dt}} - \frac{\partial L}{\partial Q_a} = - \frac{\partial R}{\partial \frac{dQ_a}{dt}}.$$

Co se týče prvního Kirchhoffova zákona, tak ten je přímým důsledkem zákona zachování náboje v integrálním tvaru.

Příklad 65. [5 bodů] Dokažte první Kirchhoffův zákon ze zákona zachování elektrického náboje.