

I.

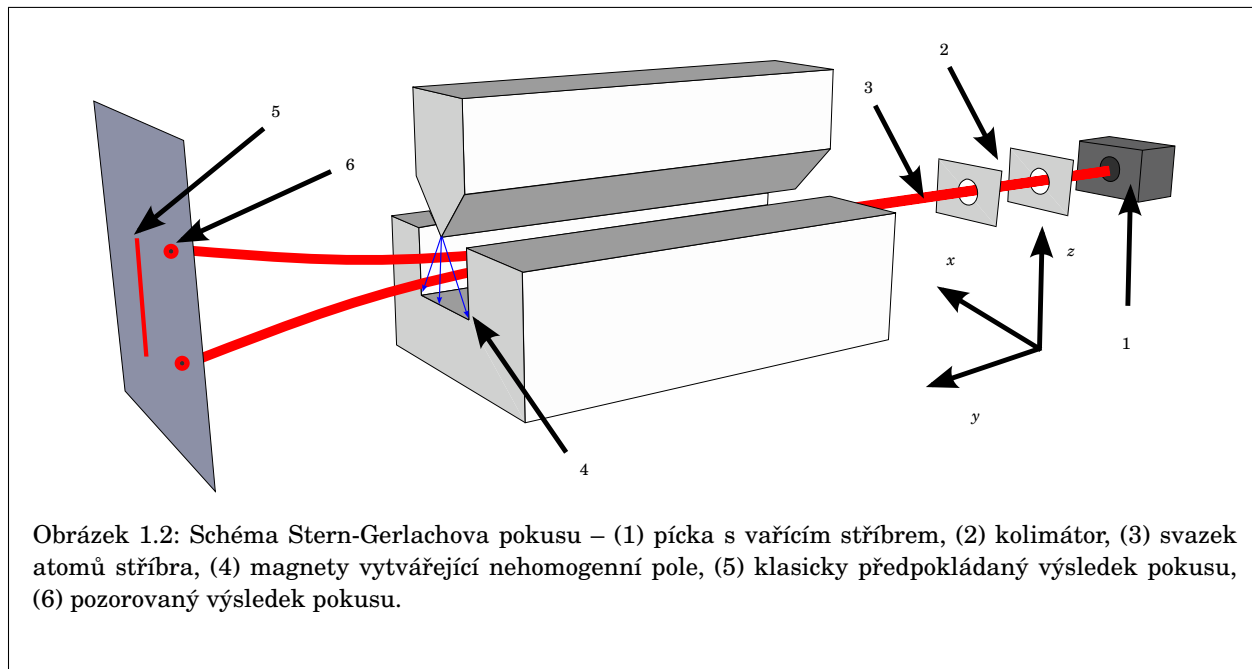
Kvantová fyzika

1. Idealizovaný Stern-Gerlachův pokus

1.1. Popis experimentu. Původní experiment byl proveden Otto Sternem a Waltherem Gerlachem v roce 1922 [3, 4, 5] a ukázal, že mikroskopické objekty mají jiné vlastnosti než makroskopické objekty a dále také že měření mikroskopických vlastností systému nutně onen systém ovlivňuje.



Experiment spočíval v průchodu atomů stříbra $^{108}_{47}\text{Ag}$ (s konfigurací elektronů ve slupkách 2–8–18–18–1) oblastí s nehomogenním magnetickým polem a jejich následnou detekcí na stínítku. Experiment byl mnohokrát opakován i s jinými atomy (vhodné jsou např. také atomy draslíku $^{39}_{19}\text{K}$ s konfigurací elektronů ve slupkách 2–8–8–1) a koncepcí shodný experiment byl proveden Sherwoodem, Stephensonem a Bernsteinem v roce 1954 [2] za účelem zjištění hodnoty spinu neutronu. Pro konkrétnost se zaměříme na popis původního experimentu Sterna a Gerlacha. Důležité je zejména, že experiment byl proveden s elektricky neutrálními částicemi, čímž se zamezilo velkým odchylkám způsobeným Lorentzovou silou a dalo vyniknout efektům spojeným s nenulovým spinem (vnitřním momentem hybnosti) jediného valenčního elektronu, protože celkový moment hybnosti elektronů v zcela zaplněných slupkách je nulový. Z hlediska nekvantové fyziky by na stínítku mělo být pozorováno spojitě rozložení dopadlých atomů stříbra, což vzápětí ukážeme výpočtem. Při experimentu bylo ovšem pozorováno něco jiného, viz obrázek 1.1). Atomy stříbra dopadaly pouze do dvou oblastí, což ukazovalo na to, že hodnoty momentu hybnosti atomu nejsou spojitě rozloženy, ale mohou nabývat pouze dvou hodnot.



Později si dokážeme, že míru kvantovosti systému spočteme z poměru klasického účinku a Planckovy konstanty \hbar . Stříbro se vypařuje při teplotě $T \approx 2500$ K a rychlost atomu stříbra je asi $v \approx \sqrt{kT/M} \approx 500$ m/s, čas za který urazí vzdálenost $\ell \approx 1$ m (rozměr aparatury na pokus) je $t \approx 0,002$ s. Účinek pro translační pohyb je tedy $S = 1/2Mv\ell \approx 4,0 \cdot 10^{-23}$ kg.m².s⁻¹, což je ve srovnání s $\hbar \approx 10^{-34}$ kg.m².s⁻¹ velmi velká hodnota. Translační pohyb atomu lze tedy popsat klasicky jako pohyb bodové částice. Naproti tomu magnetický moment atomu stříbra je $\mathbf{m} = \frac{gq}{2M_e}\mathbf{L}$, g je bezrozměrný (Landého) faktor, q je náboj elektronu, M_e je hmotnost elektronu a \mathbf{L} je (vnitřní) moment hybnosti elektronu. Nekvantový účinek pro spin je řádově $S = mBt \approx 5 \cdot 10^{-34}$ kg.m².s⁻¹, což je srovnatelné s Planckovou konstantou. Dosaдили jsme $B = 0,005$ T, což je indukce malého permanentního magnetu (jedná se o prostorovou střední hodnotu indukce magnetu vytvářejícího nehomogenní magnetické pole). Procesy spojené s vnitřním momentem hybnosti atomu stříbra musíme popisovat jinak než pomocí klasické fyziky.

Popíšeme nyní přesněji samotný pokus. V pírce vypařujeme stříbro, jehož atomy z ní unikají sérií malých otvorů tak, že vytvoří řídký (téměř nedochází ke srážkám mezi jednotlivými atomy) a kolimovaný (rychlosti jednotlivých atomů mají stejný směr) svazek. Tento svazek je veden mezi póly permanentního magnetu, přičemž jeden pól magnetu je zašpičatělý a druhý pól je plochý, což vytváří nehomogenní magnetické pole. Síla působící na *neutrální* atom je $\mathbf{F} = -\nabla U = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{m}\nabla\mathbf{B}$. S volbou os naznačenou na obrázku 1.2 Stern a Gerlach měřili složku magnetického momentu atomu stříbra ve směru osy z (a tedy také z -ovou složku spinu elektronu ve valenční slupce) a ukázali, že tato složka nabývá pouze dvou hodnot,

z teoretických úvah vyplynulo, že tyto hodnoty jsou $\pm\hbar/2$. V konfiguraci na schématu platí, že $\partial B_z/\partial z < 0$, $q < 0$, $g > 0$ a tedy atom stříbra se z -tovou složkou momentu hybnosti směrem nahoru resp. dolů (ve směru kladné resp. záporné osy z) se odchýlí nahoru resp. dolů.

1.2. Feynmanova verze Stern-Gerlachova pokusu. Feynman ve svých přednáškách [1] představil účelnou a didaktickou modifikaci Stern-Gerlachova pokusu, kterou využijeme i my v našich dalších úvahách. Vzhledem k tomu, že si tuto modifikaci budeme jen představovat, nazveme ji *myšlenkovým pokusem*.

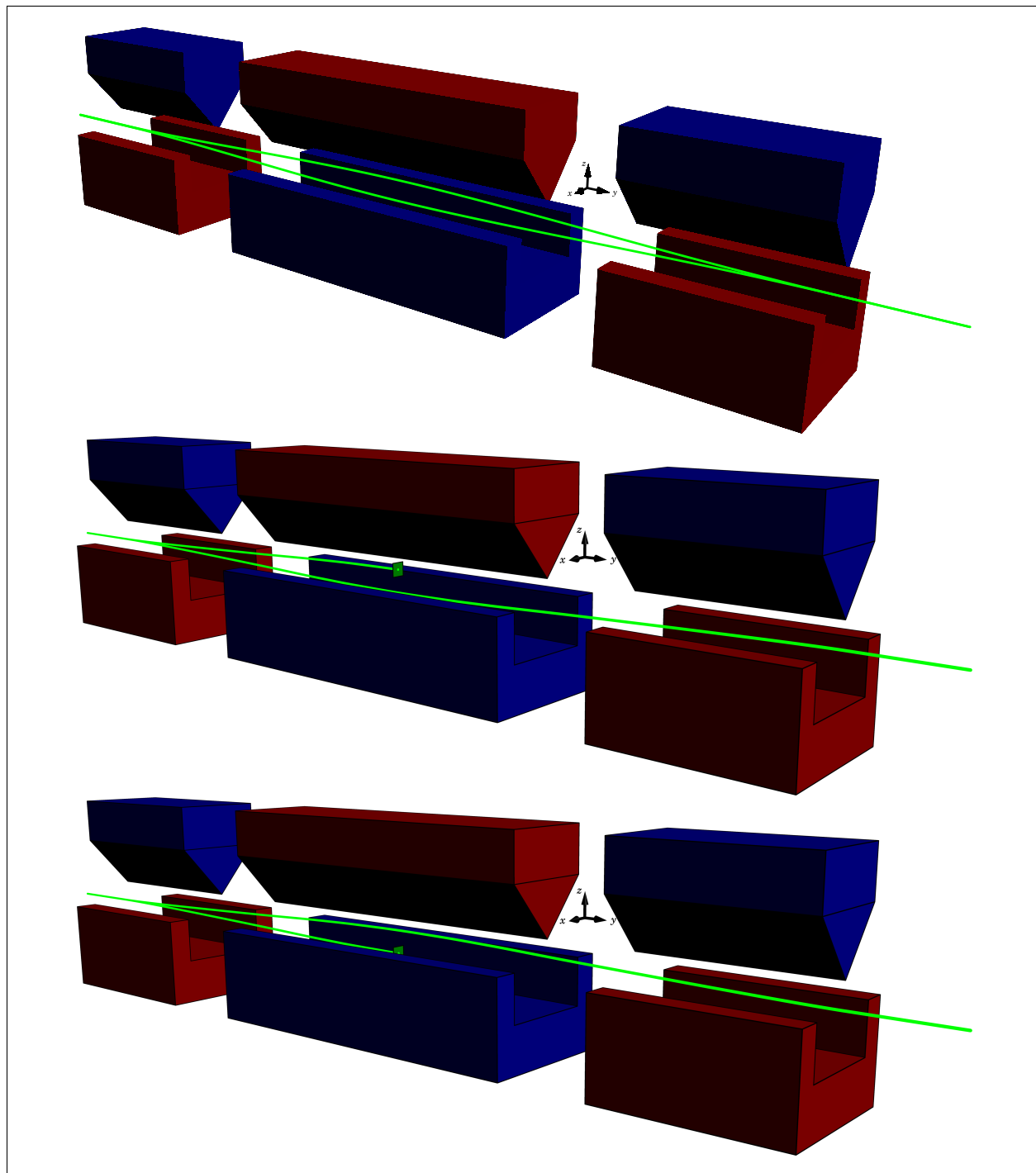
Na obrázku 1.3 vidíme schéma modifikovaného pokusu na prvním z obrázků vidíme konfiguraci magnetů, která nemá na procházející svazek částic žádný vliv. Na první pohled se tedy může zdát, že takový pokus je zbytečný. Po drobné modifikaci spočívající ve vložení překážky, která zamezuje šíření části svazku se ovšem ukazuje, se ukazuje, že taková modifikace má pro pochopení a matematický popis pokusu zásadní význam.

Pro další pochopení situace si uvědomme, že takové aparatury můžeme řadit za sebe, popřípadě ještě otočit kolem osy y . Aparatura A_+ s překážkou dole zjišťuje z -ovou složku spinu a zároveň celkového momentu hybnosti atomu stříbra. Částice, jež z ní vycházejí, mají všechny z -ovou složku spinu rovnou $\sigma_z = \hbar/2$. Říkáme také, že jsme každou částici ve svazku připravili do stavu $|+\rangle$ (prozatím to pro nás budiž symbolické označení). Podobně, aparatura A_- s překážkou nahoře připraví všechny částice do stavu $|-\rangle$, kdy mají z -ovou složku spinu $\sigma_z = -\hbar/2$.

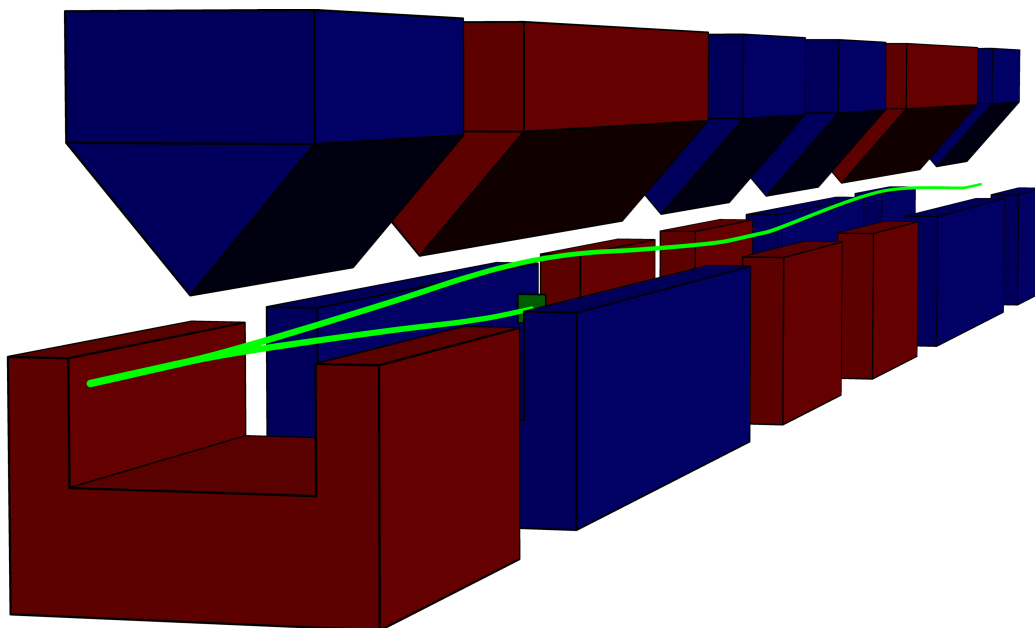
Zabývejme se nyní otázkou, co se stane, dáme-li dvě takové aparatury za sebe (se stejnou orientací). Dáme-li za sebe dvě aparatury A_+ (viz obrázek 1.4), projdou druhou aparaturou již všechny částice z první aparatury. Podobně je tomu i pokud za sebe dáme dvě aparatury A_- . Druhou aparaturou projdou již všechny částice z první aparatury. Co se stane, dáme-li za sebe dvě aparatury rozdílné, tedy A_+ a A_- (viz obrázek 1.5) nebo A_- a A_+ ? Neprojdou žádné částice.

Potud se neděje nic překvapujícího, překvapivé věci se začnou dít až v situaci, kdy za sebe zařadíme tři aparatury, z nichž ta prostřední bude otočená kolem osy y o úhel $\pi/2$ v kladném smyslu. Výsledek je překvapující. Ze systému vyjde svazek částic, byť se čtvrtinovou intenzitou než má svazek původní. Výsledek tohoto pokusu nás dovádí k závěru, že *měření ovlivňuje výsledky pokusu*.

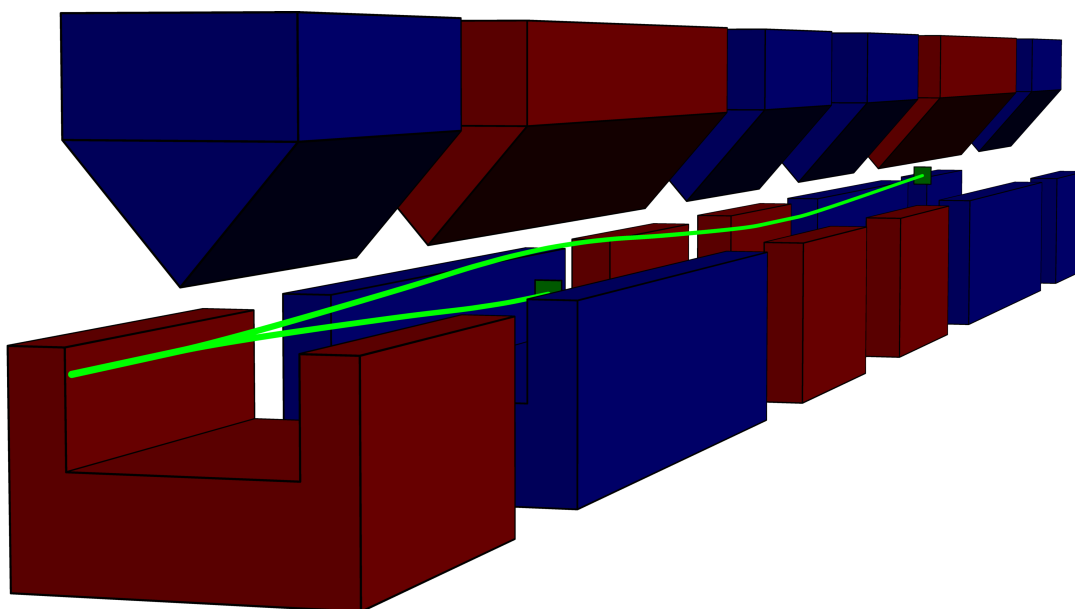
1.3. Vektor stavu. Jak popsat stav soustavy v případě Stern-Gerlachova pokusu? Stav systému popíšeme pomocí jednorozměrného podprostoru v dvourozměrném komplexním vektorovém prostoru H se samosdruženým skalárním součinem, tzv. *Hilbertově* prostoru. Připomeňme si matematickou definici vektorového prostoru H nad \mathbb{C} jeho dimenze, podprostoru a skalárního součinu ve vektorovém prostoru H .



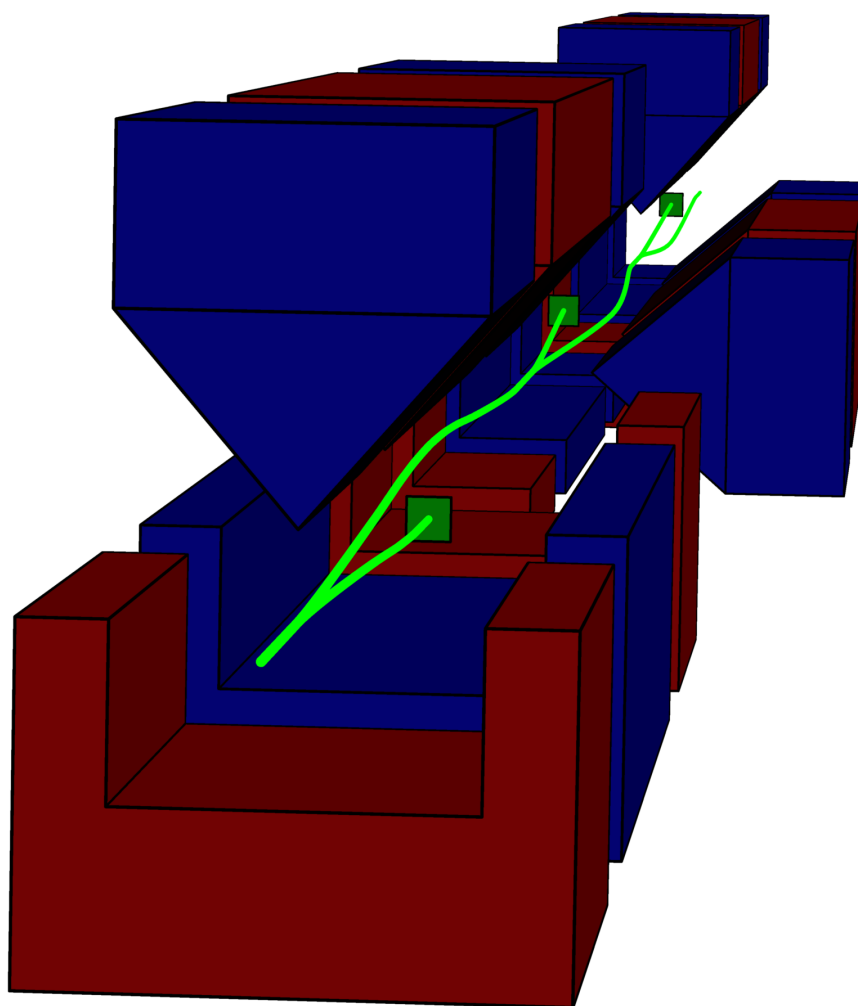
Obrázek 1.3: Feynmanova modifikace Stern-Gerlachova pokusu: Na obrázcích vidíme vždy tři dvojice magnetů (červeně je vyznačen severní pól, modře jižní pól), které mají celkem na procházející svazek částic nulový vliv, následně můžeme hornímu či dolnímu svazku zamezit v cestě vložení překážky.



Obrázek 1.4: Dvě Stern-Gerlachovy aparatury A_+ za sebou



Obrázek 1.5: Dvě Stern-Gerlachovy aparatury za sebou napřed A_+ a potom A_-



Obrázek 1.6: Tři Stern-Gerlachovy aparatury za sebou napřed A_+ a potom A_+ otočená o $\pi/2$ kolem osy svazku a nakonec opět A_+

Vektorovým prostorem H nad tělesem skalárů \mathbb{C} nazveme množinu H společně se dvěma operacemi násobení skalárem $\cdot: \mathbb{C} \times H \rightarrow H$ a sčítáním vektorů $+: H \times H \rightarrow H$, které splňují následující axiomy:

- (i) komutativita sčítání: $|u\rangle + |v\rangle = |v\rangle + |u\rangle$ pro všechna $|u\rangle, |v\rangle \in H$,
- (ii) asociativita sčítání: $(|u\rangle + |v\rangle) + |w\rangle = |u\rangle + (|v\rangle + |w\rangle) =: |u\rangle + |v\rangle + |w\rangle$ pro všechna $|u\rangle, |v\rangle, |w\rangle \in H$,
- (iii) existence neutrálního prvku pro sčítání: existuje $0 \in H$ tak, že $|u\rangle + 0 = |u\rangle$ pro všechna $|u\rangle \in H$,
- (iv) existence opačného prvku pro sčítání: pro všechna $|u\rangle \in H$ existuje $|v\rangle =: -|u\rangle$ tak, že $|u\rangle + |v\rangle = 0$.
- (v) kompatibilita násobení skalárem \cdot s násobením v tělese \mathbb{C} : $(a \cdot (b \cdot |u\rangle)) = (ab) \cdot |u\rangle$ pro všechna $a, b \in \mathbb{C}$ a $|u\rangle \in H$,
- (vi) existence neutrálního prvku pro násobení skalárem: existuje $1 \in \mathbb{C}$ tak, že $1 \cdot |u\rangle = |u\rangle$ pro všechna $|u\rangle \in H$.
- (vii) distributivita násobení skalárem vůči sčítání vektorů: $a \cdot (|u\rangle + |v\rangle) = a \cdot |u\rangle + a \cdot |v\rangle$ pro všechna $a \in \mathbb{C}$ a $|u\rangle, |v\rangle, |w\rangle \in H$,
- (viii) distributivita sčítání skalárů vůči násobení skalárem: $(a + b) \cdot |u\rangle = a \cdot |u\rangle + b \cdot |u\rangle$ pro všechna $a, b \in \mathbb{C}$ a $|u\rangle \in H$.

Značení vektorů $|u\rangle$ je typické pro kvantovou mechaniku, zavedl jej Paul Dirac a o jeho užitečnosti se přesvědčíme v dalším. U násobení skalárem zpravidla vynecháváme \cdot .

Uveďme si příklady vektorových prostorů, které budeme potřebovat v kvantové mechanice:

- (a) prostor uspořádaných n -tic komplexních čísel \mathbb{C}^n ,
- (b) prostor ℓ^2 posloupností (u_i) komplexních čísel takových, že $\sum_{i \in I} |u_i|^2 < \infty$,
- (c) prostor komplexních funkcí m reálných proměnných, sčítání a násobení skalárem funkcí je definováno pomocí vyčíslení na argumentech,
- (d) můžeme uvažovat také reálné vektorové prostory např. \mathbb{R}^n pro $n = 2$ resp. $n = 3$ užitečné v rovinné a prostorové geometrii.

Konečnou resp. spočetnou *bází* nazveme konečnou resp. spočetnou posloupnost vektorů $(|i\rangle)_{i \in I}$ takovou, že každý vektor $|u\rangle$ můžeme napsat jako konečnou resp. spočetnou *lineární kombinaci* vektorů báze $|u\rangle = \sum_{i \in I} u_i |i\rangle$, kde I je indexová množina obvykle $I = \{1, \dots, n\}$ resp. $I = \mathbb{N}$. Komplexnímu číslu u_i se říká *i-tá složka* nebo *komponenta* vektoru $|u\rangle$ vzhledem k bázi $(|i\rangle)$. Uveďme si příkladyází v různých vektorových prostorech a složek vektorů vůči nim:

- (a) standardní báze v \mathbb{C}^n : $|i\rangle = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (jednička je na *i*-té pozici),
- (a') uvažme vektor $|u\rangle = (1, i) \in \mathbb{C}^2$. Jeho složky vůči standardní bázi jsou $u_1 = 1$ a $u_2 = i$,
- (a'') uvažme stejný vektor vůči bázi $|1'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, i)$, $|2'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -i)$. Jeho složky vůči této bázi jsou $u'_1 = \sqrt{2}$ a $u'_2 = 0$,
- (b) uvažme prostor posloupností ℓ^2 , potom $|i\rangle = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ je standardní báze,
- (c) uvažme prostor komplexních 2π -periodických funkcí jedné reálné proměnné x a v něm bázi $|n\rangle = \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$, $n \in \mathbb{Z}$. K vyjádření složek vektorů potřebujeme pojem skalárního součinu na H ,
- (c') uvažme prostor $L^2(\mathbb{R})$ komplexních funkcí $f(x)$ jedné reálné proměnné x integrovatelných s kvadrátem (tj. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$), přičemž funkce považujeme za stejné, liší-li se na množině míry nula, a v něm bázi

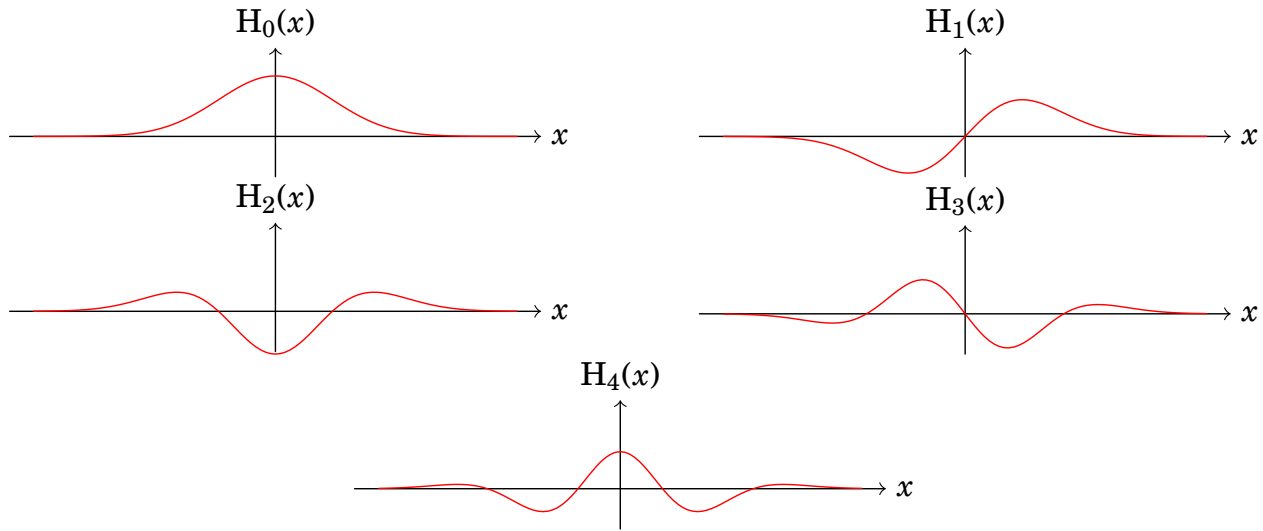
$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \cdot \left(\frac{1}{\pi}\right)^{1/4} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x), \quad (\text{I.1})$$

kde $n \in \mathbb{N}_0$ a $H_n(x)$ jsou tzv. Hermiteovy polynomy $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$, $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$ (viz obrázek 1.7).

Mohutnost báze, v konečném případě tedy počet prvků, nazýváme *dimenzí* vektorového prostoru H . *Podprostorem* $K \leq H$ Hilbertova prostoru H nazveme podmnožinu H , která je zároveň i vektorovým prostorem vzhledem k zúžení sčítání vektorů a násobení skalárem. Podprostory dimenze jedna, které určují stavy se dají zadat pomocí nenulového vektoru, tvořícího bázi podprostoru.

Skalární součin na H definujeme jako seskvilineární zobrazení $\langle \cdot | \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ splňující následující axiomy

- (i) linearita v druhém argumentu: $\langle u | (a|v\rangle + b|w\rangle) \rangle = a \langle u | v \rangle + b \langle u | w \rangle$ pro všechna $a, b \in \mathbb{C}$ a $|u\rangle, |v\rangle \in H$,
- (ii) symetrie vůči komplexnímu sdružení: $\langle u | v \rangle = \overline{\langle v | u \rangle}$ pro všechna $|u\rangle, |v\rangle \in H$,



Obrázek 1.7: Báze prostoru $L^2(\mathbb{R})$ zkonstruovaná pomocí Hermiteových polynomů.

- (iii) pozitivní definitnost: $\langle u|u \rangle \geq 0$ pro všechna $|u\rangle \in H$ a $\langle u|u \rangle = 0$ tehdy a jen tehdy, když $|u\rangle = 0$.

Skalární součin v H indukuje skalární součin v každém podprostoru H . *Ortogonalní doplněk* K^\perp podprostoru $K \leq H$ je $K^\perp = \{|u\rangle \in H \mid \langle u|v\rangle = 0 \text{ pro všechna } v \in K\}$. Pro libovolný vektor $|u\rangle \in H$ je $\| |u\rangle \| = (\langle u|u \rangle)^{1/2}$ normou. Skalární součin axiomatizuje pojem ortogonalit vektorů, systém vektorů $(|u_i\rangle)$ se nazývá *ortonormální*, platí-li $\langle u_i|u_j\rangle = \delta_{ij}$ pro všechna i a j (ortogonalní systém získáme z ortonormálního vynásobením vektorů systému nenulovými skaláry). Z každé báze lze tzv. Gram-Schmidtovým procesem vytvořit ortonormální bázi. Vektory $\langle u| = (|u\rangle)^\dagger$ jsou formálně prvky sdruženého prostoru H^\dagger . Pokud $H = \mathbb{C}^n$, je operace \dagger daná kompozicí transpozice a komplexního sdružení. V dalším uvedeme příklady skalárního součinu na Hilbertových prostorech H , které používáme v kvantové fyzice.

- (a) $H = \mathbb{C}^n$ a $(|1\rangle, \dots, |n\rangle)$ je standardní báze, $|u\rangle = \sum_{i=1}^n u_i |i\rangle$ a $|v\rangle = \sum_{i=1}^n v_i |i\rangle$. Potom $\langle u|v\rangle = \sum_{i=1}^n \bar{u}_i v_i$ je standardní skalární součin na \mathbb{C}^n a standardní báze je vůči němu ortonormální,
- (b) zobecněním (a) získáme skalární součin na ℓ^2 , ve standardní bázi $|u\rangle = \sum_{i=1}^\infty u_i |i\rangle$ a $|v\rangle = \sum_{i=1}^\infty v_i |i\rangle$. Potom $\langle u|v\rangle = \sum_{i=1}^\infty \bar{u}_i v_i$ a standardní báze je opět ortonormální,
- (c) na prostoru 2π -periodických funkcí zavedeme skalární součin takto: $\langle u|v\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{u(x)}v(x)dx$, tato báze je rovněž ortonormální,
- (c') na prostoru $L^2(\mathbb{R})$ funkcí integrovatelných v kvadrátu zavedeme skalární součin takto:

$\langle u|v\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{u(x)}v(x)dx$, báze zkonstruovaná pomocí Hermiteových polynomů je ortonormální.

Stav částice, kdy $\sigma_z = \hbar/2$ budeme nyní reprezentovat vektorem $(1,0) \in \mathbb{C}^2$ a stav kdy $\sigma_z = -\hbar/2$ vektorem $(0,1) \in \mathbb{C}^2$. Vektory tvoří ortogonální systém, tak je tomu ostatně, kdy se měřené stavy vylučují: pozorujeme *bud'* hodnotu $\sigma_z = \hbar/2$, *nebo* hodnotu $\sigma_z = -\hbar/2$.

1.4. Pozorovalelné veličiny a operátory. Pozorovatelnou veličinu S v kvantové fyzice reprezentujeme samosdruženým lineárním operátorem $S: H \rightarrow H$ (značíme stejně) a měřitelné hodnoty této veličiny jsou potom dány spektrem operátoru S , tj. množinou všech vlastních hodnot operátoru H . Zopakujeme si definici vlastní hodnoty s operátoru a vlastního vektoru $|s\rangle$ operátoru S příslušného vlastní hodnotě s : platí $S|s\rangle = s|s\rangle$, $|s\rangle \neq 0$. Ke každému operátoru T na H existuje právě jeden sdružený operátor T^\dagger definovaný vztahem $(\langle u|T^\dagger|v\rangle = \langle u|(T|v\rangle)$, který musí platit pro všechna $|u\rangle, |v\rangle \in H$. Samosdružený operátor splňuje $\langle u|(S|v\rangle) = (\langle u|S)|v\rangle$ pro všechna $|u\rangle, |v\rangle \in H$, Diracovo značení vektorů a skalárního součinu je tedy pro samosdružené operátory obzvlášť výhodné.

Pokud je na Hilbertově prostoru H zadána ortonormální báze $(|i\rangle)$, je jednoduché spočítat složky u_j libovolného vektoru $|u\rangle = \sum_{i \in I} u_i |i\rangle$. Spočteme skalární součin

$$\langle j|u\rangle = \langle j|\sum_{i \in I} u_i |i\rangle = \sum_{i \in I} I u_i \langle j|i\rangle = \sum_{i \in I} u_i \delta_{ij} = u_j.$$

Dokážeme nyní, že vlastní hodnoty s_i samosdruženého operátoru S jsou reálné a vlastní vektory $|s_i\rangle$ lze zvolit tak, že tvoří ortonormální bázi Hilbertova prostoru H . Formulovat to budeme pomocí série lemat.

Lema 1: Vlastní hodnoty samosdruženého operátoru jsou reálné.

Důkaz: Buď $S \in \mathbb{C}$ vlastní hodnota S a $|s\rangle$ příslušný vlastní vektor. Platí $s \langle s|s\rangle = \langle s|(s|s\rangle) = \langle s|(S|s\rangle) = (\langle s|S)|s\rangle = \bar{s} \langle s|s\rangle$ a odtud $s = \bar{s}$. ■

Lema 2: Platí-li pro operátor T na H vztah $\langle u|T|u\rangle = 0$ pro všechna $|u\rangle \in H$, je $T = 0$ (nulový operátor – každému vektoru přiřadí nulový vektor 0).

Důkaz: Ze sekvilinearit plyne

$$\langle u|S|v\rangle = \frac{(\langle u| + \langle v|)S(|u\rangle + |v\rangle) - (\langle u| - \langle v|)S(|u\rangle - |v\rangle)}{4} + \frac{(\langle u| + i\langle v|)S(|u\rangle + i|v\rangle) - (\langle u| - i\langle v|)S(|u\rangle - i|v\rangle)}{4} i,$$

ale pravá strana je nulová z předpokladu. Vezmeme-li $|v\rangle = S|u\rangle$, dostaneme $(\langle u|S)(S|u\rangle) = 0$ a kvůli pozitivní definitnosti musí být $S|u\rangle = 0$. ■

Lema 3: Vlastní vektory $|s\rangle, |s'\rangle$ příslušné různým vlastním hodnotám $s \neq s'$ samosdruženého operátoru S na H tvoří ortogonální systém.

Důkaz:

$$(s - s')(\langle s|s'\rangle) = (s \langle s|) |s'\rangle - \langle s|(s' |s'\rangle) = (\langle s|S^\dagger) |s'\rangle - \langle s|(S |s'\rangle) = 0. \quad \blacksquare$$

Lema 4: Každý operátor S na H , $\dim H = n < \infty$, má vlastní hodnotu.

Důkaz: Zvolme nenulový vektor $|u\rangle$. Systém vektorů $(|u\rangle, S|u\rangle, S^2|u\rangle, \dots, S^n|u\rangle)$ je lineárně závislý (jedná se o $n + 1$ vektorů a $\dim H = n$). Existují tedy $p_i \in \mathbb{C}$ tak, že

$$p_0|u\rangle + p_1S|u\rangle + p_2S^2|u\rangle + \dots + p_nS^n|u\rangle = 0,$$

přičemž ne všechna p_i jsou nulová. Označme m největší index takový, že $p_m \neq 0$. Potom můžeme kvůli základní větě algebry (každý komplexní polynom má kořen) psát

$$p_0 + p_1z + p_2z^2 + \dots + p_nz^n = c(z - s_1)(z - s_2)\dots(z - s_m)$$

a

$$p_0|u\rangle + p_1S|u\rangle + p_2S^2|u\rangle + \dots + p_nS^n|u\rangle = c(S - s_1\mathbf{1})(S - s_2\mathbf{1})\dots(S - s_m\mathbf{1})|u\rangle = 0$$

($\mathbf{1}$ značí identický operátor) a $S - s_j\mathbf{1}$ není injektivní alespoň pro jednu hodnotu $j \in \{1, \dots, m\}$. ■

Věta o spektrálním rozkladu samosdruženého operátoru S : Buď S samosdružený operátor na H , $\dim H = n < \infty$. Potom v H existuje ortonormální báze složená z vlastních vektorů S .

Důkaz: Budeme postupovat indukcí vzhledem k dimenzi H . Pro $\dim H = 1$ věta zjevně platí. Pro $\dim H > 1$. Z lematu 4 plyne, že S má vlastní vektor $|s_1\rangle$ příslušný vlastní hodnotě s_1 . Uvažme $K = \text{image}(S - s_1\mathbf{1})$. Platí $\dim K < \dim H$. K je invariantní podprostor, tj. $S(U) \subseteq U$. Uvažme $|u\rangle \in K$, zřejmě $S|u\rangle = (S - s_1\mathbf{1})|u\rangle + s_1|u\rangle$, ale oba sčítance patří do K , tedy i jejich součet. Dále platí $(\langle s_1|S)(S|s_1\rangle) = (s_1)^2 \langle s_1|s_1\rangle$. Vezměme vektor $|s_1\rangle$ a doplňme jej na ortonormální bázi $(|s_1\rangle, \dots, |s_n\rangle)$ s případným využitím Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu. Vzhledem k takto vzniklé bázi je matice operátoru S blokově diagonální

$$(S_{ij}) = (\langle j|S|i\rangle) = \begin{pmatrix} s_1 & S_{12} & \dots & S_{1n} \\ 0 & S_{22} & \dots & S_{2n} \\ 0 & S_{32} & \dots & S_{3n} \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & S_{n2} & \dots & S_{nn} \end{pmatrix}.$$

Pro samosdružený operátor platí $\|S|s_1\rangle\|^2 = (\langle s_1|S^\dagger)(S|s_1\rangle) = |s_1|^2 = (\langle s_1|S)(S^\dagger|s_1\rangle) = \|S^\dagger|s_1\rangle\|^2 = |s_1|^2 + |S_{12}|^2 + \dots + |S_{1n}|^2$. Odtud vidíme, že $S_{12} = \dots = S_{1n} = 0$ a můžeme zúžit S_K , přičemž $\dim K = n - 1$. Po konečném počtu kroků ($\dim H < \infty$) dostaneme $\dim H = 1$. ■

Uvedeme si nyní příklady samosdružených operátorů na Hilbertově prostoru H .

(a) vezměme $H = \mathbb{C}^2$ a $S = \sigma_z$. Potom $|s_1\rangle = (1, 0)$, $s_1 = \hbar/2$, $|s_2\rangle = (0, 1)$, $s_2 = -\hbar/2$ a matice

$$\langle s_j | \sigma_z | s_i \rangle = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

je již diagonální,

(a') na stejném prostoru uvažme $S = \sigma_x$, později uvidíme, že ve standardní bázi ($|1\rangle, |2\rangle$) je

$$\langle j | \sigma_x | i \rangle = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vlastní hodnoty zjistíme z rovnice

$$|\sigma_x - s1| = \begin{vmatrix} -s & \hbar/2 \\ \hbar/2 & -s \end{vmatrix} \text{ a odtud plyne, že } \left(\frac{2s}{\hbar}\right)^2 - 1 = 0$$

a odtud $s = \pm \hbar/2$. Vlastní vektory jsou $|s_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ pro $s_1 = \hbar/2$ a $|s_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$ pro $s_2 = -\hbar/2$ a v této bázi je pochopitelně

$$\langle s_j | \sigma_x | s_i \rangle = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Operátory σ_z a σ_x nelze tedy zároveň diagonalizovat,

(c) operátor $X: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$, $f(x) \mapsto xf(x)$ je samosdružený,

(c') operátor $P: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$, $f(x) \mapsto -i \frac{df}{dx}(x)$ je rovněž samosdružený. Zde musíme uvážit, že každé $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ je limitou posloupnosti nekonečněkrát diferencovatelných funkcí ležících v $L^2(\mathbb{R})$.

V kvantové teorii je (dokonalé) měření interakcí kvantového systému s klasickým systémem. Pozorovatelná veličina S reprezentovaná samosdruženým operátorem S může nabývat pouze hodnot, jež jsou vlastními hodnotami S . Po změření konkrétní hodnoty s je systém ve stavu $|s\rangle$ daném vlastním vektorem k vlastní hodnotě s . Bez újmy na obecnosti můžeme uvažovat vektory stavů, jež mají jednotkovou normu.

Vyložme nyní, jak můžeme matematicky popsat experiment se třemi soustavami Stern-Gerlach-Feynmanových magnetů. Po průchodu první soustavou připravíme každý atom stříbra do stavu daného vektorem $(1, 0)$. Potom změříme hodnotu $\sigma_x = \hbar/2$ a systém se dostane do stavu daného vlastním vektorem $1/\sqrt{2}(1, 1)$. Na závěr změříme $\sigma_z = \hbar/2$ a systém se dostane do stavu daného vektorem $(1, 0)$.

Ptejme se, jak dopadne měření σ_x u systému připraveného do stavu $|1\rangle = (1, 0)$ předtím, než měření provedeme. Odpověď zní, že to s jistotou nemůžeme říct. *Předpovědi kvantové teorie*

mají *pravděpodobnostní charakter* a pravděpodobnost, že systém jež byl ve stavu $|1\rangle$ změříme ve stavu $|s_1\rangle$ je $|\langle s_1|1\rangle|^2 = 1/2$. Potom je systém ve stavu $|s_1\rangle$ a měříme pravděpodobnost, že bude ve stavu $|1\rangle$, tj. dostaneme rovněž $|\langle 1|s_1\rangle|^2 = 1/2$. Celkem tedy budeme pozorovat, že projde $1/2 \cdot 1/2 = 1/4$ atomů stříbra. Obecně platí, že pravděpodobnost nalezení systému ve stavu $|v\rangle$, pokud víme, že je ve stavu $|u\rangle$, je

$$|\langle v|u\rangle|^2, \quad (\text{I.2})$$

komplexní číslo $\langle v|u\rangle$ nazýváme *amplitudou pravděpodobnosti* nalezení systému ve stavu $|v\rangle$ pokud víme, že je ve stavu $|u\rangle$. Vždy platí

$$\begin{aligned} |\langle u|u\rangle|^2 &= \overline{\langle u|u\rangle} \langle u|u\rangle = \left(\sum_{j \in I} |j\rangle \langle j|u\rangle \right)^\dagger \left(\sum_{i \in I} |i\rangle \langle i|u\rangle \right) = \sum_{i,j \in I} \overline{\langle j|u\rangle} \langle i|u\rangle \langle j|i\rangle = \\ &= \sum_{i,j \in I} \overline{\langle j|u\rangle} \langle i|u\rangle \delta_{ij} = \sum_{i \in I} \overline{\langle i|u\rangle} \langle i|u\rangle = \sum_{i \in I} |\langle i|u\rangle|^2 = 1. \end{aligned}$$

1.5. Střední hodnoty a rozptyl. Můžeme spočítat střední hodnotu $\langle \sigma_x \rangle$ při měření σ_x pro systém připravený ve stavu $|1\rangle$. Dostaneme $\langle \sigma_x \rangle = \frac{1}{2} \frac{\hbar}{2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{\hbar}{2}\right) = 0$. Obecně platí: střední hodnotu pozorovatelné veličiny S reprezentované operátorem S ve stavu $|u\rangle$ dostaneme jako $\langle S \rangle = \langle u|S|u\rangle$. Rozptyl je obecně $(\Delta S)^2 = \langle (S - \langle S \rangle 1)^2 \rangle$, pro předchozí případ snadno spočteme $(\Delta S)^2 = \hbar^2/4$.

2. Rotace v kvantové fyzice

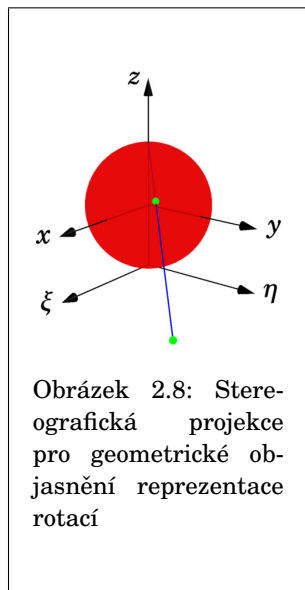
2.1. Rotace pro spin 1/2. Již dříve jsme si uvedli, že stav kvantového systému pro spin 1/2 je dán jednorozměrným podprostorem $K \leq H$, který můžeme určit (nejednoznačně!) jednotkovým vektorem $|u\rangle$, $K = [|u\rangle]$, kde hranatou závorkou označujeme lineární obal. Jednorozměrné podprostory si můžeme představit jako třídy ekvivalence vektorů vzhledem k relaci $|u\rangle \sim |v\rangle$ právě pokud existuje nenulové $a \in \mathbb{C}$ tak, že $|u\rangle = a|v\rangle$. Nad tělesem reálných čísel jsou takové třídy ekvivalence základem projektivní geometrie, jež se používá např. pro perspektivní zobrazování. V kvantové mechanice je situace méně geometricky přehledná kvůli použití komplexních čísel, přesto lze získat jistou geometrickou představu. Potřebujeme zjistit jak se bude transformovat operátor σ_z při libovolném natočení souřadnicových os.

Uvažujme $H = \mathbb{C}^2$, stavy jsou jednorozměrné podprostory $K \leq H$, máme $(z_1, z_2) \sim (w, 1)$, je-li $z_2 \neq 0$, $(z_1, 0) \sim (1, 0)$. Potřebujeme zjistit, jakým způsobem jsou na H reprezentovány trojrozměrné rotace souřadnicového systému. Uvažme sféru $x^2 + y^2 + z^2 = (\frac{1}{2})^2$ a stereografickou projekci z jejího severního pólu $(0, 0, \frac{1}{2})$ na rovinu $z = -\frac{1}{2}$, souřadnice v této rovině označme

(ξ, η) , ztotožníme ji s komplexní rovinou $w = \xi + i\eta$. Dostaneme

$$w = \xi + i\eta = \frac{x + iy}{\frac{1}{2} - z}.$$

Body sféry a tedy i jim přiřazené body v rovině $\xi\eta$ ztotožníme s jednorozměrnými podprostory reprezentovanými vektorem $(w, 1)$, severnímu pólu přiřadíme podprostor reprezentovaný vektorem $(1, 0)$.



Napřed odvodíme, jaká transformace odpovídá otočení o úhel φ kolem osy z v rovině xy . Připomeňme si, že v komplexní rovině otočení bodu $x + iy$ okolo počátku o úhel φ dostaneme tako: $x + iy \mapsto (x + iy)e^{i\varphi}$. Bod

$$w = \frac{x + iy}{\frac{1}{2} - z}$$

přejde tedy na bod $w' = w e^{i\varphi}$. Z teoretické mechaniky víme, že libovolné otočení v prostoru získáme otočením napřed kolem osy z , potom kolem nové osy x a nakonec kolem nové osy z . Potřebujeme odvodit, co odpovídá otočení o úhel θ kolem osy x , tedy v rovině yz . Zavedme

$$v = \frac{y + iz}{\frac{1}{2} - x},$$

potom $v' = v e^{i\theta}$. Dále upravujeme

$$\frac{v + i}{v - i} = \frac{\frac{y + iz}{\frac{1}{2} - x} + i}{\frac{y + iz}{\frac{1}{2} - x} - i} = \frac{y + iz + i(\frac{1}{2} - x)}{y + iz - i(\frac{1}{2} - x)} = \frac{-(x + iy) + \frac{1}{2} + z}{(x - iy) - \frac{1}{2} + z}.$$

Vzhledem k tomu, že bod (x, y, z) leží na sféře o poloměru $\frac{1}{2}$ platí $(x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = (\frac{1}{2} - z)(\frac{1}{2} + z)$. Odtud vyjádříme vydělením stereografickou projekcí $x + iy = (\frac{1}{2} - z)w$ také $x - iy = (\frac{1}{2} + z)/w$. Celkem tedy dostaneme

$$\frac{v + i}{v - i} = \frac{-(\frac{1}{2} - z)w + \frac{1}{2} + z}{(\frac{1}{2} + z)/w - (\frac{1}{2} - z)} = w$$

a vyjádřením v pomocí w dostaneme

$$v = i \frac{w + 1}{w - 1}.$$

Stejnětak vyjádříme pro otočené body

$$v' = i \frac{w' + 1}{w' - 1},$$

přičemž víme, že $v' = v e^{i\theta}$. Celkem tedy

$$i \frac{w' + 1}{w' - 1} = i e^{i\theta} \frac{w + 1}{w - 1}$$

a odtud

$$w' = \frac{1 - e^{i\theta} - w(1 + e^{i\theta})}{-(1 + e^{i\theta}) + w(1 - e^{i\theta})},$$

což s využitím vztahů

$$\begin{aligned} e^{i\theta} + 1 &= 2 \cos \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right) \\ e^{i\theta} - 1 &= 2i \sin \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned}$$

lze uvést do tvaru

$$w' = \frac{w \cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2}}{i w \sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2}}.$$

Zřejmě lze jak otočení kolem osy x , tak i otočení kolem osy z a tím pádem každé otočení zapsat jako lineární lomenou transformaci

$$w' = \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta}$$

a v Hilbertově prostoru $H = \mathbb{C}^2$ tím pádem jako lineární transformaci

$$\begin{pmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

přičemž otočení o úhel φ kolem osy z odpovídá matice

$$\begin{pmatrix} e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix}$$

a otočení o úhel θ kolem osy x odpovídá matice

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & i \sin \frac{\theta}{2} \\ i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

Otočení v Hilbertově prostoru $H = \mathbb{C}^2$ o Eulerovy úhly φ , θ a ψ získáme tedy pomocí matice $G(\varphi, \theta, \psi)$ dané součinem

$$\begin{pmatrix} e^{i\frac{\psi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\psi}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & i \sin \frac{\theta}{2} \\ i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\varphi+\psi}{2}} & i \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\psi-\varphi}{2}} \\ i \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\psi-\varphi}{2}} & \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\varphi+\psi}{2}} \end{pmatrix}. \quad (\text{I.3})$$

Operátor σ_y dostaneme ze σ_z otočením kolem osy x o úhel $\theta = -\pi/2$ a σ_x ze σ_y dalším otočením o $\psi = -\pi/2$. Operátory do nové báze transformujeme $O' = G^{-1}OG$. Tímto postupem dostaneme

$$\sigma_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{I.4})$$

což jsou až na násobek $\hbar/2$ tzv. *Pauliho matice*.

Vztahy mezi otočeními v euklidovském prostoru \mathbb{R}^3 a transformacemi stavů a operátorů v Hilbertově prostoru $H = \mathbb{C}^2$ vyjadřují nutnou nezávislost popisu na volbě souřadnicového systému.

Všimněme si dále, že jak matice odpovídající otočení kolem osy z , tak i matice odpovídající otočení kolem osy x zachovávají skalární součin a mají jednotkový determinant, tyto vlastnosti zůstávají zřejmě v platnosti i pro jejich libovolné součiny. Tvoří grupu $SU(2)$ speciálních unitárních matic řádu 2. Ukázali jsme, že každému otočení, tj. prvku grupy $SO(3)$ v euklidovském prostoru \mathbb{R}^3 odpovídá matice z $SU(2)$. Pokud se podíváme na matice vyjadřující transformace v Hilbertově prostoru, obsahují poloviční úhly – otočením např. o $\varphi = 2\pi$ nezískáme matici 1 ale -1 , jednotkovou matici 1 získáme až otočením o 4π . Každé matici otočení z $SO(3)$ tedy odpovídají právě dvě matice z $SU(2)$.

2.2. Další příklady dvoustavových systémů: polarizace světla, molekula čpavku, obecný q-bit. Předchozí diskusi o stavech a operátorech ve Stern-Gerlachově pokusu lze převést na podobné systémy. Jako první se budeme věnovat polarizaci světla. Měme jednotlivé fotony, jež se pohybují podél optické osy a do jejich cesty vkládáme polarizační filtry. Stav fotonu po průchodu horizontálním filtrem označme $|h\rangle$, po průchodu vertikálním filtrem $|v\rangle$. Opět platí $\langle h|v\rangle = 0$, oběma filtry za sebou neprojde žádný foton. Vzhledem k tomu, že fotony mají spin 1, jsou vztahy pro transformaci při rotacích jiné, než pro případ elektronů, neutronů či atomů stříbra, které mají spin 1/2. Můžeme si ale pomoci vztahy z klasické teorie elektromagnetického pole, které platí pro elektromagnetická pole tvořená obrovským počtem fotonů, účinek takového elektromagnetického pole je o mnoho řádů větší než Planckova konstanta \hbar . V tomto případě lze z Maxwellových rovnic odvodit vztahy, jež platí pro otočení polarizačního filtru v rovině kolmé k šíření fotonů o úhel φ . Jedná se o reálné otočení a platí

$$(|h'\rangle \quad |v'\rangle) = (|h\rangle \quad |v\rangle) \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Uvažme např. následovnou situaci: mějme polarizační filtr v horizontální poloze a stejný filtr pootočíme v kladném smyslu o $\varphi = \pi/3$ s tím, že jej umístíme za první filtr. Potom $|h'\rangle = 1/2|h\rangle + \sqrt{3}/2|v\rangle$ a amplituda pravděpodobnosti průchodu fotonu oběma filtry je $\langle h'|h\rangle = 1/2$, pravděpodobnost je potom kvadrát modulu amplitudy tj. 1/4. Vzhledem k tomu, že můžeme pomocí fotonásobiče detekovat jednotlivé fotony, ukazuje i takový myšlenkový (ale proveditelný) experiment a jeho modifikace analogické k Stern-Gerlach-Feynmanovu experimentu,

že výsledky měření mají pravděpodobnostní charakter. Doposud uvažované báze odpovídaly lineárně polarizovanému světlu. Existuje ale další fyzikálně zajímavá báze v Hilbertově prostoru polarizačních stavů fotonu. Je to

$$|r\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|h\rangle + i|v\rangle)$$

$$|\ell\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|h\rangle - i|v\rangle),$$

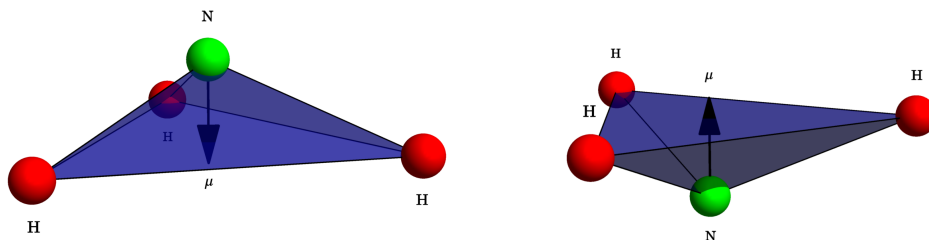
kde $|r\rangle$ odpovídá pravotočivě polarizovanému fotonu a $|\ell\rangle$ levotočivě polarizovanému. Připomeňme, že kruhově polarizované fotony vyrobíme z lineárně polarizovaných pomocí tzv. čtvrtvlnné destičky vyrobené z materiálu vykazujícího dvojlom. Je zajímavé se podívat na to jak se tyto nové báze chovají vzhledem k otočení v rovině kolmé k směru šíření fotonu. Spočteme

$$|r'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|h'\rangle + i|v'\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}[(\cos\varphi|h\rangle + \sin\varphi|v\rangle) + i(-\sin\varphi|h\rangle + \cos\varphi|v\rangle)] = e^{-i\varphi}|r\rangle$$

$$|\ell'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|h'\rangle - i|v'\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}[(\cos\varphi|h\rangle + \sin\varphi|v\rangle) - i(-\sin\varphi|h\rangle + \cos\varphi|v\rangle)] = e^{i\varphi}|\ell\rangle.$$

Bázové vektory kruhově polarizovaných fotonů tedy při otočení kolem osy šíření nabudou pouze fázový faktor.

Stavy molekuly čpavku. Uvažme následující extrémně zjednodušený kvantový model molekuly čpavku [1]. Zvolíme směr nahoru v prostoru libovolně. Uvážíme stav $|u\rangle$, kde atom dusíku je v horní poloze a stav $|d\rangle$, kde atom dusíku je v dolní poloze. Tyto stavy jsou zřejmě ortogonální, $\langle d|u\rangle = 0$. Libovolný stav molekuly čpavku uvažované jako dvoustavový systém dostaneme $|\psi\rangle = a|u\rangle + b|d\rangle$.



Obrázek 2.9: Jednoduchý model čpavku NH_3 uvažovaného jako dvoustavový systém s elektrickým dipólovým momentem μ

Obecný dvoustavový systém se někdy nazývá q -bit v analogii s klasickým bitem. Realizace klasického bitu v informatice je typicky: vypnuto/zapnuto, 0/1 atd. Informatiči a fyzici zkoumají, zda v budoucnu nepůjde vyrobit počítače na principu kvantového q -bitu, je ale komplikované vyrobit dvoustavové systémy, jež neinteragují s okolím, pokud nechceme, aby tak činily.

2.3. Přejchod mezi ortonormálními bázemi v Hilbertově prostoru. Na jednoduchých příkladech jsme si ukázali, že kvantové stavy můžeme zapisovat jako vektory v Hilbertově prostoru a každý systém navzájem se vylučujících stavů určuje ortonormální bázi. V principu můžeme bázi zvolit libovolně, prakticky lze často zvolit bázi výhodně tak, aby operátory v ní měly jednoduchý tvar. Věnujme se přechodu od jedné ortonormální báze ($|i\rangle$) k druhé ($|j'\rangle$) určenému maticí

$$(|1'\rangle \quad |2'\rangle \quad \cdots \quad |n'\rangle) = (|1\rangle \quad |2\rangle \quad \cdots \quad |n\rangle) \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & \cdots & U_{1n} \\ U_{21} & U_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ U_{n1} & U_{n2} & \cdots & U_{nn} \end{pmatrix} = (|i\rangle)U.$$

Pro všechny $|i\rangle \in H$ musí platit

$$\delta_{i'j'} = \langle j' | i' \rangle = (\langle j | U^\dagger)(U | i \rangle) = \langle j | i \rangle = \delta_{ij}$$

a odtud máme $U^\dagger U = 1$. Operátorům převádějícím ortonormální báze na ortonormální báze se říká unitární, tyto operátory zachovávají skalární součin a jejich aplikace odpovídá pouze jiné volbě báze v Hilbertově prostoru stavů. Příkladem unitárního operátoru je operátor z rovnice (I.3), který odpovídá pouze změně otočení souřadnicových os pozorovatele. Další příklad je unitární operátor změny báze polarizačních stavů z ($|h\rangle, |v\rangle$) na ($|r\rangle, |\ell\rangle$).

2.4. Samosdružené operátory jako infinitezimální unitární operátory. Z předchozího příkladu již víme, že měřitelným veličinám odpovídají samosdružené operátory. Jak ale přiřadíme měřitelné fyzikální veličině, např. poloze, hybnosti, momentu hybnosti, energii atd. samosdružený operátor? Vodítkem jsou symetrie a věta Emmy Noetherové, která dává symetrie do souvislosti se zachovávajícími se veličinami. Tyto symetrie jsou zachovány i v kvantové teorii. Jako první se zabýváme momentem hybnosti. Moment hybnosti a jeho zachování souvisí s tím, že se nemění vlastnosti prostoru při otočení souřadnicového systému, říkáme také, že prostor je izotropní. Předtím, než se podíváme, jaké důsledky přináší izotropie prostoru do kvantové teorie, se budeme zabývat obecnými infinitezimálními unitárními operátory.

Uvažme jednoparametrickou grupu $U(s)$ unitárních transformací, kupříkladu unitární transformace odpovídající otáčení souřadnicového systému kolem pevné osy o úhel s . Zřejmě platí $U(0) = 1$, také $U(s_2)U(s_1) = U(s_1 + s_2)$ a odtud $U^{-1}(s) = U^\dagger(s) = U(-s)$. Zejména musí platit $U^N(s) = U(Ns)$. Závisí-li unitární transformace $U(s)$ na s diferencovatelně, můžeme uvažovat o konečných transformacích jako o kompozicích mnoha malých transformací, tj. $U(s) = U^N(s/N)$. Pišme $U(s) = 1 + A(s) + \cdots$. Potom po dosazení dostaneme

$$\begin{aligned} U^N(s) &= U(Ns) \\ (1 + A(s) + \cdots)^N &= 1 + A(Ns) + \cdots \\ 1 + NA(s) + \cdots &= 1 + A(Ns) + \cdots \end{aligned}$$

a vidíme, že operátor $A(s)$ je lineární v s . Z historických důvodů píšeme

$$U(s) = 1 - \frac{i}{\hbar} s A + \dots$$

Celkem tedy máme

$$A = i\hbar \left. \frac{dU(s)}{ds} \right|_{s=0}$$

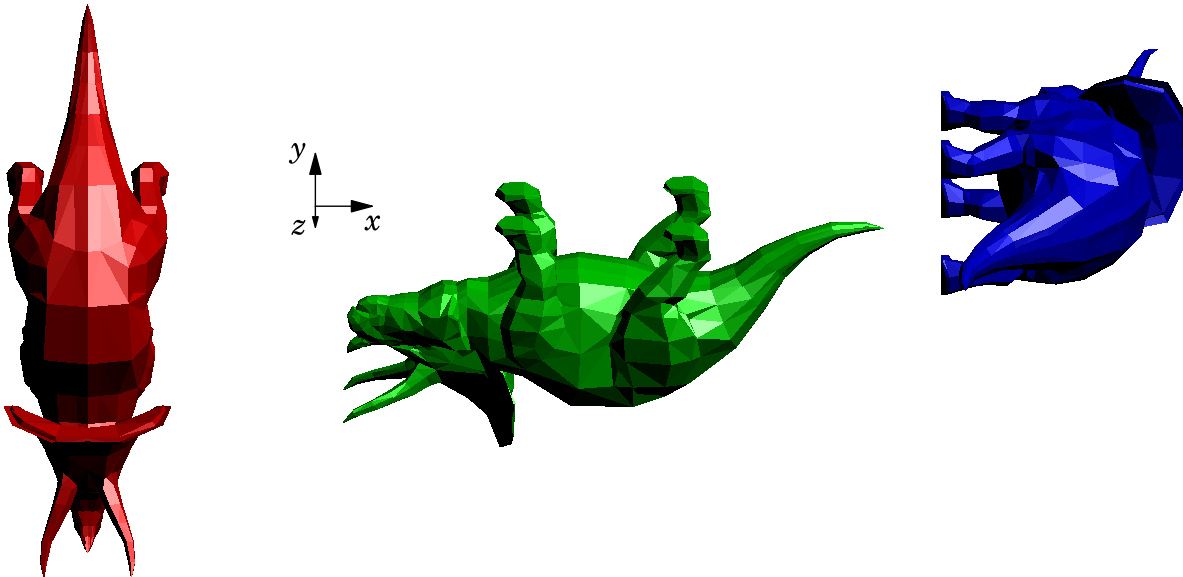
a naopak

$$U(s) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{is}{\hbar N} A \right)^N = e^{-\frac{is}{\hbar} A}.$$

Infinitezimální transformace A tedy určuje danou jednoparametrickou grupu transformací $U(s)$ a naopak. Odvoďme, jaké vlastnosti má infinitezimální transformace A . Pro každou unitární transformaci platí

$$1 = U^\dagger(s)U(s) = \left(1 + \frac{i}{\hbar} s A^\dagger + \dots \right) \left(1 - \frac{i}{\hbar} s A + \dots \right) = 1 + \frac{i}{\hbar} s (A^\dagger - A) + \dots$$

a vidíme, že operátor A je samosdružený.



Obrázek 2.10: Triceratops v původní pozici (červeně), otočený napřed kolem osy x o $\pi/2$, potom kolem osy y o $\pi/2$ (zeleně) a napřed kolem osy y o $\pi/2$, potom kolem osy x o $\pi/2$ (modře)

Literatura

- [1] Feynman R, Leighton R, Sands M. *The Feynman Lectures on Physics*. 3 volumes 1964, 1966
- [2] Sherwood J E, Stephenson T E, Bernstein S, Stern-Gerlach Experiment on Polarized Neutrons, *Phys. Rev.* 96: 1546–1548, 1954
- [3] Gerlach W, Stern O, Der experimentelle Nachweis der Richtungsquantelung im Magnetfeld, *Zeitschrift für Physik* 9: 349–352, 1922
- [4] Gerlach W, Stern O, Das magnetische Moment des Silberatoms, *Zeitschrift für Physik* 9: 353–355, 1922
- [5] Gerlach W, Stern O, Der experimentelle Nachweis des magnetischen Moments des Silberatoms, *Zeitschrift für Physik* 8: 110–111, 1922