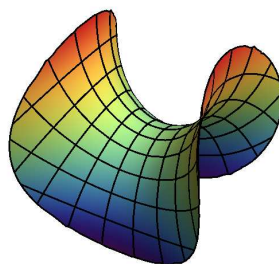
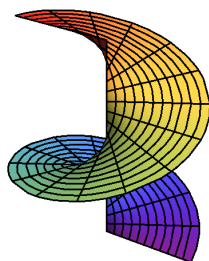
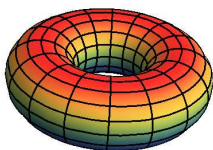


Hladké variety v příkladech

Michael Krbek



Úvod

Tento učební text obsahuje dvanáct lekcí věnovaných hladkým varietám doplněných řešenými i neřešenými příklady. Formát odpovídá jednosemestrálnímu kurzu v rozsahu dvou hodin přednášky a dvou hodin cvičení. Tato prostorová omezení se podepsala na poněkud nestandardní volbě základních definic, kdy využíváme okolnosti, že studenti jsou sběhlí v teorii metrických prostorů, neznají ovšem vesměs obecnou topologii. Co se týče problematiky tečných prostorů, volíme zde algebraický přístup, zejména proto, že dovoluje další zobecnění s výhledem na supervariety, s nimiž se v teoretické fyzice někdy setkáváme. Zvláštní pozornost věnujeme lokalizaci a globalizaci geometrických objektů na varietě. Vektorová pole, Lieovu závorku vektorových polí a Lieovy derivace definujeme pomocí derivací v algebře hladkých funkcí a dále axiomatičticky především proto, abychom ilustrovali využití těchto algebraických metod. Praktickou aplikaci uvedeme na příkladu Frobeniovy věty. V textu využíváme jazyk diferenciálních forem, jež studenti ovládají, operace s nimi zobecníme na variety pomocí lokalizace a rozkladu jednotky. Aplikaci Stokesovy věty a jejím abstraktním výkladem motivujeme de Rhamovu větu. Teoretická část je uzavřena moderním výkladem Riemannovy geometrie. V textu je mnoho prostoru věnováno aplikacím: osvětlíme Hopfovu fibraci, strukturu Poincarého grupy, spočteme geodetiky na sféře, geometricky objasníme strukturu Schwarzschildova řešení v obecné teorii relativity.

Obsah

1. Hladké variety, hladká zobrazení	4
1.1. Topologické variety	4
1.2. Mapy, atlasy, diferencovatelné struktury	7
1.3. Příklady hladkých variet	10
1.4. Hladké funkce na varietách a hladká zobrazení variet	11
2. Tečný prostor, tečné zobrazení, podvariety, vektorové bandly	15
2.1. Tečné vektory	15
2.2. Tečné zobrazení	19
2.3. Podvariety	22
2.4. Tečný bandl	27
2.5. Konstrukce nových vektorových bandlů	30

2.6. Lokalizační funkce a rozklad jednotky	31
2.7. Vektorová pole a operace s nimi	35
3. Diferenciální formy a integrace	41
3.1. Lineární diferenciální formy	41
3.2. Vnější derivace	44
3.3. Integrace	48
3.4. Stokesova věta	51
3.5. De Rhamova věta	53
4. Riemannova geometrie à la Cartan	58
4.1. Bandl repérů a konexe na něm	58
4.2. Riemannovy variety a Levi–Civitova konexe	64
4.3. Geodetiky	68

1. Hladké variety, hladká zobrazení

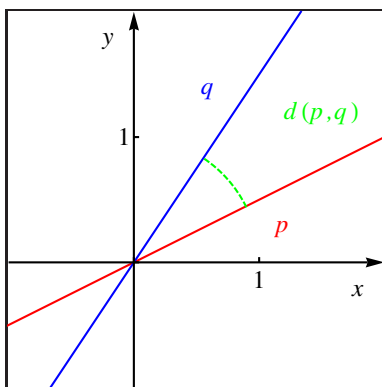
Hladké variety jsou obecné prostory, jež si ponechávají dostatečné množství vlastností euklidovského prostoru \mathbf{R}^n na to, abychom na nich mohli provádět analýzu, tj. derivovat, integrovat, atd. Podstatná vlastnost takových prostorů tkví v tom, že jejich dostatečně malé části vypadají stejně jako otevřené množiny v euklidovském prostoru \mathbf{R}^n . V dalším přesněji popíšeme, co máme na mysli, když říkáme slova obecný prostor, vypadají stejně, dostatečně malé části.

1.1. Topologické variety. Námi uvažované variety budou vždy metrickými prostory, obvyklá definice variety je zdánlivě obecnější, dá se ovšem ukázat, že tradiční definice a naše definice, která je uvedena dále, jsou si ekvivalentní.

Uvažme metrické prostory M a N a jejich spojitě zobrazení $f: M \rightarrow N$, jež je bijekcí a jehož inverze je rovněž spojitá. Takové zobrazení f nazýváme *homeomorfismus* mezi prostory M a N , prostory M a N nazýváme *homeomorfní*.

Příklad 1. Uvažujme $M = (0, 1)$, $N = (0, 1)$, M i N uvažujeme se standardní euklidovskou metrikou, $f: M \rightarrow N$, $f: x \mapsto x^2$. Toto zobrazení je spojitě, je to bijekce se spojitou inverzí $f^{-1}: y \mapsto \sqrt{y}$ a tedy se jedná o homeomorfismus.

Příklad 2. Uvažujme množinu \mathbf{RP}_1 přímek v \mathbf{R}^2 procházejících počátkem s výjimkou osy y , tj. $M = \mathbf{RP}_1 \setminus \{y\}$. Vzdálenost $d(p, q)$ dvou přímek p a q budiž jejich neorientovaný úhel (viz obrázek). Zobrazení $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ definujme $f: p = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | y = ax\} \mapsto a \in \mathbf{R}$. Ukážeme, že i zde se jedná o homeomorfismus. Pro zmatení čtenáře shodně označujeme osu y a druhou souřadnici bodu (x, y) na přímce p . Zobrazení f je zjevně bijekce, musíme pouze dokázat spojitost f a f^{-1} . Podle definice musíme pro každé $p \in M$ a $\epsilon > 0$ najít $\delta > 0$ tak, že pokud platí $d(p, q) < \delta$ potom také $|f(p) - f(q)| < \epsilon$.



Zvolme tedy přímku $p \in M$, tj. její směrnici a , a $\epsilon > 0$ libovolně. Vezměme přímku

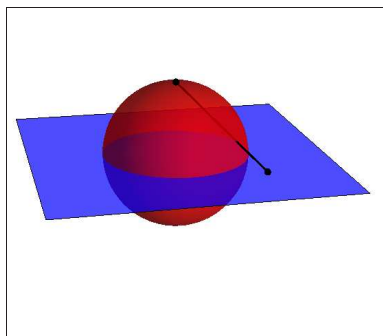
$q \in M$ se směrnicí b . Potom explicitně dostáváme

$$d(p, q) = |\arctg a - \arctg b|.$$

Veźměme q tak, aby $|\arctg a - \arctg b| < \frac{\epsilon}{1+a^2}$ potom bude $|a - b| < \epsilon$ vzhledem k tomu, že $|\arctg a - \arctg b| \approx \frac{|a-b|}{1+a^2}$.

Obdobně postupujeme pro f^{-1} . Podle definice musíme pro kaŹdě $a \in \mathbf{R}$ a $\epsilon > 0$ najít $\delta > 0$ tak, že pokud $|a - b| < \delta$ potom také $|\arctg a - \arctg b| < \epsilon$. Zde ale stačí zvolit $\delta = \epsilon$. Uvědomme si, že množina M v tomto příkladě *není* podmnoŹinou v euklidovském prostoru!

Příklad 3. UvaŹujme nyní *jednotkovou sfěru* $\mathbf{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ bez severního pólu $S = (0, 0, 1)$, tj. $M = \mathbf{S}^2 \setminus \{S\}$ a $N = \mathbf{R}^2 \times \{0\}$. *Stereografickou projekci* f ze severního pólu S bodu $p \in M$ definujeme jako průsečík přímky Sp s rovinou N , přičemž první dvě souřadnice bodu v N určují bod v \mathbf{R}^2 (viz obrázek). Vzhledem k tomu, že $M, N \subset \mathbf{R}^3$, metrika na nich je indukována euklidovskou metrikou na \mathbf{R}^3 . Toto zobrazení je rovněž spojitá bijekce se spojitou inverzí. Vyjádřete je analyticky a ukaŹte to!



Metrický prostor nazýváme *separabilní*, obsahuje-li spočetnou hustou podmnoŹinu. Separabilní metrický prostor M nazveme *topologickou varietou*, pokud kaŹdý bod $p \in M$ má otevřené okolí $U \ni p$, jeŹ je homeomorfní otevřené množině v euklidovském prostoru \mathbf{R}^n . Přirozené číslo n nazýváme (lokální) dimenzí topologické variety M . V dalším budeme uvaŹovat pouze topologické variety konstantní dimenze. Tento požadavek vede pouze k nevelkému zúŹení předmětu našeho zájmu, dá se ukázat, že variety nekonstantní dimenze se získají z variet konstantních dimenzí disjunktními sjednoceními. Požadavek separability metrického prostoru vede k tomu, že kaŹdou topologickou varietu lze vloŹit do euklidovského prostoru dostatečně vysoké dimenze. VloŹení metrických prostorů $f: M \rightarrow N$ je homeomorfizmus $M \rightarrow f(M) \subset N$, kde metrika na $f(M)$ je restrikcí metriky na N .

Příklad 4. UvaŹujme metrický prostor P přímek z příkladu 2 a na něm dvě otevřené množiny $U = P \setminus \{y\}$ a $V = P \setminus \{x\}$. JiŹ víme, že U je homeomorfní \mathbf{R} , záměnou kartézských souřadnic $x \leftrightarrow y$ ihned vidíme, že i V je homeomorfní \mathbf{R} . KaŹdá přímka $p \in P$

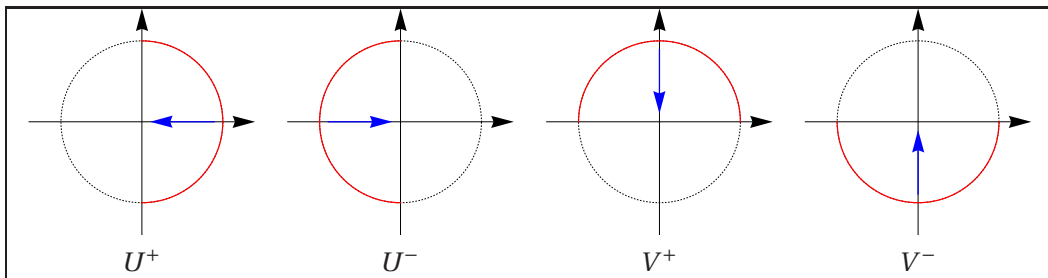
leží v otevřeném okolí U nebo V (většina přímkopět v obou). Metrický prostor P je tedy topologickou varietou dimenze 1.

Příklad 5. Uvažme jednotkovou sféru z příkladu 3 a na ní dvě otevřené množiny $U = \mathbf{S}^2 \setminus \{S\}$ a $V = \mathbf{S}^2 \setminus \{J\}$, kde $J = (0, 0, -1)$ je jižní pól. Potom U homeomorfně zobrazíme na celé \mathbf{R}^2 stereografickou projekcí ze severního pólu, obdobně otevřenou množinu V stereografickou projekcí z jižního pólu zobrazíme rovněž na celé \mathbf{R}^2 . Každý bod na sféře má otevřené okolí U nebo V (většina bodů obě). Jednotková sféra tedy je topologickou varietou dimenze 2.

Příklad 6. Uvažujme jednotkovou kružnici $\mathbf{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ (metrika je opět dána např. euklidovskou vzdáleností v \mathbf{R}^2) společně s otevřenými množinami $U^+ = \{(x, y) \in \mathbf{S}^1 \mid x > 0\}$, $U^- = \{(x, y) \in \mathbf{S}^1 \mid x < 0\}$, $V^+ = \{(x, y) \in \mathbf{S}^1 \mid y > 0\}$, $V^- = \{(x, y) \in \mathbf{S}^1 \mid y < 0\}$ a homeomorfizmy

$$\begin{array}{ll} \varphi_U^+ : U^+ \rightarrow (-1, 1), & \varphi_U^+ : (x, y) \mapsto y, \\ \varphi_U^- : U^- \rightarrow (-1, 1), & \varphi_U^- : (x, y) \mapsto y, \\ \varphi_V^+ : V^+ \rightarrow (-1, 1), & \varphi_V^+ : (x, y) \mapsto x, \\ \varphi_V^- : V^- \rightarrow (-1, 1), & \varphi_V^- : (x, y) \mapsto x. \end{array}$$

Každý bod ve \mathbf{S}^1 leží alespoň v jedné z těchto otevřených množin, proto je jednotková kružnice topologickou varietou. Jiná možnost, jak ukázat totéž, je využít stereografické projekce na přímkupodobně jako v příkladě 3.



Příklad 7. (Dirichletův hřeben). Uvažujme množinu

$$H = \coprod_{x \in (0,1)} \{x\} \times \begin{cases} \times \{0\} & \text{pro } x \text{ iracionální} \\ \times [0, 1) & \text{pro } x \text{ racionální.} \end{cases}$$

Zřejmě platí $H \subset \mathbf{R}^2$ a H je tedy metrickým prostorem s metrikou indukovanou z \mathbf{R}^2 . Ze známých vlastností racionálních a reálných čísel je zřejmé, že žádný bod v H nemá otevřené okolí homeomorfní s otevřenou množinou v \mathbf{R}^n . Metrický prostor H tedy není topologickou varietou.

1.2. Mapy, atlasy, diferencovatelné struktury. Jednou z prvních uvažovaných variet byla sféra, mnohdy se za sféru považuje zemský povrch. Analogie mezi povrchem Země a varietou a také mezi homeomorfizmy do euklidovských prostorů \mathbf{R}^n a mapováním povrchu Země na listy papíru dala vzniknout následující terminologii. Podstatný je zejména pojem atlasu, zde se nám jedná o vztah mezi dvěma mapami, jež různě zobrazují stejnou oblast.

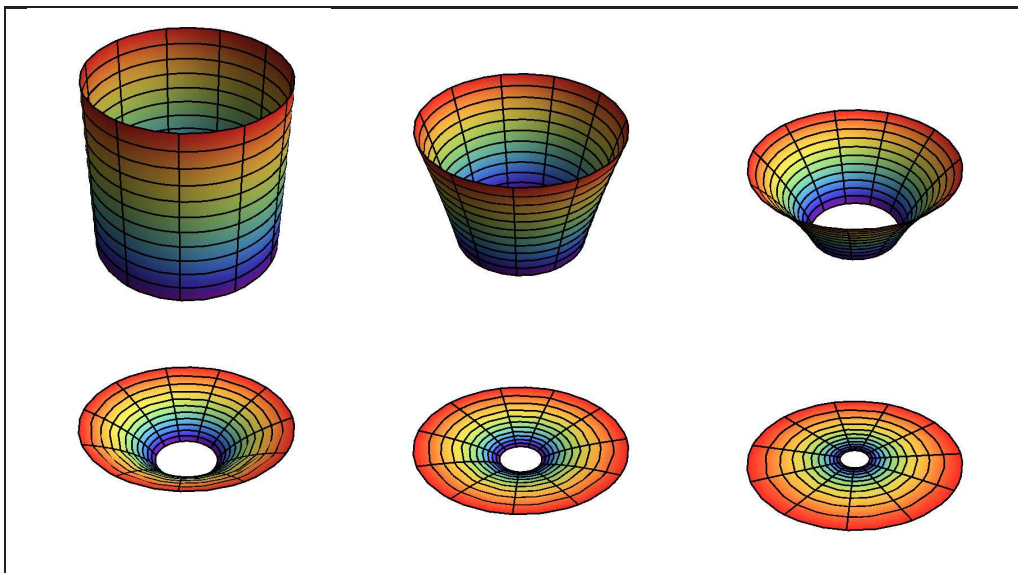
Mapou na topologické varietě M rozumíme homeomorfismus φ otevřené množiny $U \subset M$ na otevřenou množinu $\varphi(U) \subset \mathbf{R}^n$. Definiční obor zobrazení φ je U , obor hodnot φ je $\varphi(U)$. Mapy se tradičně zapisují jako uspořádané dvojice (u, φ) . Některé příklady map jsme si již uváděli v předchozím odstavci.

Příklad 8. Buď V vektorový prostor dimenze n nad tělesem reálných čísel s libovolnou metrikou. Zvolme bázi (e_1, \dots, e_n) ve V . Tato volba určuje mapu φ na celém V : každý vektor $v \in V$ lze jednoznačně zapsat $v = v^1 e_1 + \dots + v^n e_n$. Mapa φ je dána předpisem $\varphi: v \mapsto (v^1, \dots, v^n)$. Celou varietu V lze zobrazit do \mathbf{R}^n jednou mapou. Takovou mapu nazýváme *globální*.

Příklad 9. Uvažme nekonečný válec $C = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ (metrika je opět indukována z \mathbf{R}^3) a mapu $\varphi: C \rightarrow \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $\varphi: (x, y, z) \mapsto (x e^z, y e^z)$. Potom φ je globální mapa na válci C . Důvodem, proč tato globální mapa existuje, je skutečnost, že válec můžeme spojitě zdeformovat na rovinu, z které je vyjmut jeden bod. Explicitně máme

$$[0, 1] \times C \ni (t, (x, y, z)) \mapsto (x e^{tz}, y e^{tz}, (1-t)z) \in \mathbf{R}^3.$$

Pro $t = 0$ máme válec, pro $t = 1$ máme rovinu, z níž je vyjmut bod.



Připomeňme si napřed, co rozumíme *hladkým* zobrazením $f: \mathbf{R}^m \supset U \rightarrow \mathbf{R}^n$. Zobrazení f je hladké, existují-li všechny jeho derivace a jsou-li spojité.

Příklad 10. Uvažujme zobrazení

$$f: \mathbf{R}^2 \supset (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbf{R}^2 \setminus \{(x, 0) \in \mathbf{R}^2 \mid x \leq 0\}$$

dané předpisem $f: (r, \varphi) \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ a pro první složku spočtěme

$$\frac{\partial^{a+b} r \cos \varphi}{\partial r^a \partial \varphi^b} = \begin{cases} 0 & \text{pro } a \geq 2, \\ r^{1-a} \cos \varphi & \text{pro } a = 0, 1 \text{ a } b = 0 \pmod{4}, \\ -r^{1-a} \sin \varphi & \text{pro } a = 0, 1 \text{ a } b = 1 \pmod{4}, \\ -r^{1-a} \cos \varphi & \text{pro } a = 0, 1 \text{ a } b = 2 \pmod{4}, \\ r^{1-a} \sin \varphi & \text{pro } a = 0, 1 \text{ a } b = 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Pro všechna $a, b \in \mathbf{N}_0$ získáme spojité funkce. Obdobný výsledek získáme pro druhou složku. Zobrazení f je tedy hladké.

Přistupme nyní k definici *hladkého atlasu* na topologické varietě M , $\dim M = n$. Bud' I libovolná indexová množina. Hladký atlas A je množina map $A = \{(U_i, \varphi_i) \mid i \in I\}$ splňující následující axiomy

- (i) Hladký atlas pokrývá celou topologickou varietu M , tj.

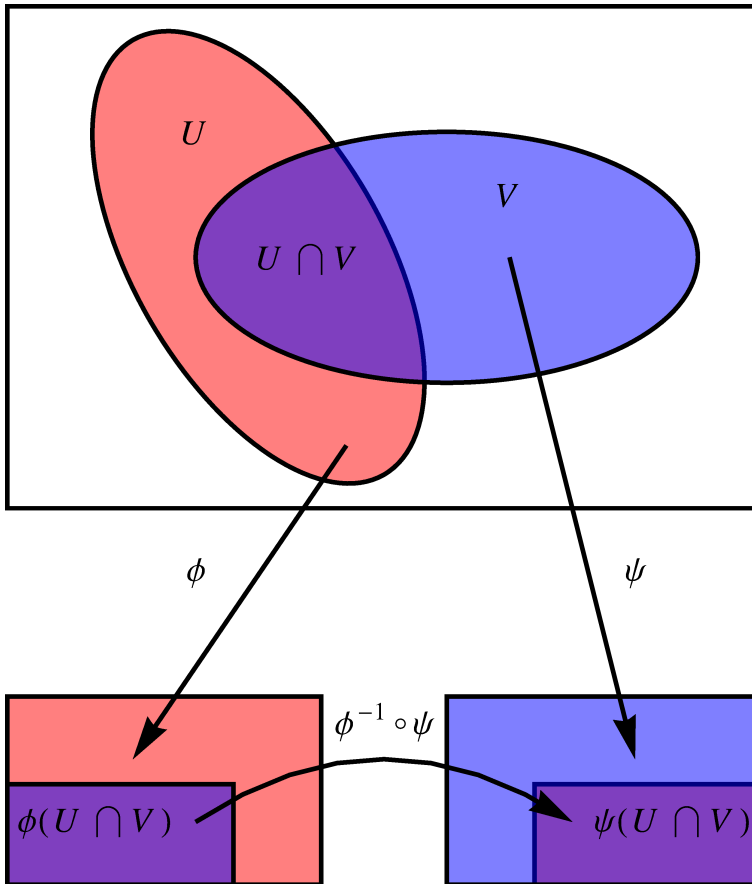
$$M = \bigcup_{i \in I} U_i.$$

- (ii) Pro všechna $i, k \in I$ taková, že $U_i \cap U_k \neq \emptyset$, je zobrazení

$$\varphi_{ik} = \varphi_k \circ \varphi_i^{-1}: \mathbf{R}^n \supset \varphi_i(U_i \cap U_k) \rightarrow \varphi_k(U_i \cap U_k) \subset \mathbf{R}^n$$

hladké.

Zobrazení φ_{ik} se nazývají *přechodové funkce*. Z definice vyplývá, že $\varphi_{ki} = \varphi_{ik}^{-1}$ a jedná se tedy o hladké bijekce otevřených množin v \mathbf{R}^n s hladkou inverzí.



Příklad 11. Každá globální mapa na topologické varietě je atlasem tvořeným touto jednou mapou.

Příklad 12. Uvažme topologickou varietu \mathbf{RP}_1 z příkladu 4 a atlas

$$\begin{aligned} \varphi_1: \mathbf{RP}_1 \setminus \{y\} &\rightarrow \mathbf{R} & \varphi_2: \mathbf{RP}_1 \setminus \{x\} &\rightarrow \mathbf{R} \\ \varphi_1: p = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = ax\} &\mapsto a & \varphi_2: p = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = by\} &\mapsto b \end{aligned}$$

s dvěma mapami. V tomto případě je $U_1 \cap U_2 = \mathbf{RP}_1 \setminus \{x, y\}$, $\varphi_1(U_1 \cap U_2) = \mathbf{R} \setminus \{0\} = \varphi_2(U_1 \cap U_2)$. Přejchodové funkce

$$\begin{aligned} \varphi_{12}: \mathbf{R} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbf{R} \setminus \{0\} & \varphi_{21}: \mathbf{R} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbf{R} \setminus \{0\} \\ \varphi_{12}: a &\mapsto \frac{1}{a} & \varphi_{21}: b &\mapsto \frac{1}{b} \end{aligned}$$

jsou hladké a dvouprvková množina $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ je hladkým atlasem na \mathbf{RP}_1 .

Příklad 13. Dokažte, že mapy určené stereografickými projekcemi na severní pól S a jižní pól J v příkladu 5 tvoří hladký atlas na jednotkové sféře \mathbf{S}^2 .

Příklad 14. Dokažte, že množina map $\{\varphi_U^+, \varphi_U^-, \varphi_V^+, \varphi_V^-\}$ z příkladu 6 je hladkým atlasem na \mathbf{S}^1 .

Na hladkých atlasech dané topologické variety M definujeme následující relaci ekvivalence: hladké atlasy A a B jsou si ekvivalentní, je-li jejich sjednocení $A \cup B$ rovněž hladkým atlasem. Tato relace ekvivalence rozděluje atlasy na topologické varietě M do tříd ekvivalence. Třidu ekvivalence atlasů nazýváme *hladkou strukturou* na M , hladkou strukturu společně s topologickou varietou nazýváme *hladkou varietou*. Hladkou varietu obvykle zadáváme pomocí libovolného reprezentanta A třídy ekvivalence atlasů $[A]$.

Příklad 15. Uvažujme topologickou varietu \mathbf{R} s globálním hladkým atlasem $A = \{(\mathbf{R}, \varphi_1 : x \mapsto x)\}$ a jiným globálním atlasem $B = \{(\mathbf{R}, \varphi_2 : x \mapsto x^3)\}$. pokud mají být A a B ekvivalentní, musí být i $A \cup B$ hladkým atlasem. Přejchodová funkce $\varphi_{12} : x \mapsto x^3$ je hladká, ale přechodová funkce $\varphi_{21} : y \mapsto y^{1/3}$ hladká není, první derivace neexistuje v 0. Atlasy A a B tedy na \mathbf{R} zadávají dvě různé hladké struktury.

1.3. Příklady hladkých variet. *Příklad 16.* Každý vektorový prostor V konečné dimenze je hladkou varietou. Globální atlas je určen volbou báze. Detaily doplňte sami.

Příklad 17. Otevřená podmnožina W hladké variety M s atlasem (U_i, φ_i) je hladkou varietou s atlasem $(U_i \cap W, \varphi_i|_W)$.

Příklad 18. Grafem hladkého zobrazení $f : U \rightarrow \mathbf{R}^m$, kde $U \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina, rozumíme podmnožinu

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \in U \times \mathbf{R}^m\}.$$

Graf hladké funkce je hladkou varietou s atlasem určeným atlasem na U , jelikož zobrazení

$$\Gamma(f) \rightarrow U, \quad (x, f(x)) \mapsto x$$

a zobrazení

$$U \rightarrow \Gamma(f), \quad x \mapsto (x, f(x))$$

jsou hladká a navzájem si inverzní.

Příklad 19. Kartézský součin hladkých variet je hladkou varietou.

Příklad 20. Množina všech regulárních lineárních transformací $\text{GL}(V)$ vektorového prostoru V konečné dimenze je hladkou varietou.

1.4. Hladké funkce na varietách a hladká zobrazení variet. Uvažujme hladkou varietu M , tj. topologickou varietu M s atlasem $A = \{(U_i, \varphi_i) \mid i \in I\}$. **Funkce** $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ je **hladká**, jsou-li hladké funkce $f \circ \varphi_i^{-1}: \varphi_i(U_i) \rightarrow \mathbf{R}$ pro všechna $i \in I$. Nyní je třeba se ujistit, že definice dává smysl, totiž že nezávisí na volbě atlasu z hladké struktury. Zvolíme-li proto na topologické varietě M jiný hladký atlas B ekvivalentní s A , můžeme uvažovat následovně:

- (a) je-li funkce f hladká vzhledem k danému atlasu, je hladká i k jeho libovolnému rozšíření (přidání dalších map),
- (b) z toho plyne hladkost funkce f vzhledem k atlasu $A \cup B$,
- (c) je-li funkce f hladká vzhledem k danému atlasu, je hladká i k jeho libovolnému zúžení (odebrání map),
- (d) z toho plyne hladkost funkce f vzhledem k atlasu B .

Pojem hladké funkce je tedy dobře definován.

Příklad 21. Pevně zvolme funkci $g: \mathbf{R}^2 \ni (x, y) \mapsto e^{-x^2-4y^2} \in (0, 1]$. Na hladké varietě \mathbf{RP}_1 všech přímk procházejících počátkem zadané hladkým atlasem z příkladu 12 a 4 je dána funkce $f: \mathbf{RP}_1 \rightarrow \mathbf{R}$ předpisem

$$f: p \mapsto \int_p g.$$

Dokážeme, že f je hladká funkce. Pro $p \in U$ je $y = ax$ a tedy

$$f \circ \varphi_1^{-1}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-(1+4a^2)x^2} \sqrt{1+a^2} = \sqrt{\frac{\pi(1+a^2)}{1+4a^2}},$$

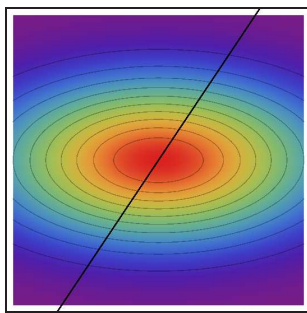
obdobně pro $p \in V$ je $x = by$ a tedy

$$f \circ \varphi_2^{-1}(b) = \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-(b^2+4)y^2} \sqrt{b^2+1} = \sqrt{\frac{\pi(b^2+1)}{b^2+4}}.$$

Na $U \cap V$ je $\varphi_{12}: a \mapsto \frac{1}{a}$. Ale skutečně platí

$$\sqrt{\frac{\pi(\frac{1}{a^2}+1)}{\frac{1}{a^2}+4}} = \sqrt{\frac{\pi(1+a^2)}{1+4a^2}}$$

a tedy f je hladká funkce na varietě \mathbf{RP}_1 .



Příklad 22. Na jednotkové sféře \mathbf{S}^2 je zadána funkce $f: \mathbf{S}^2 \ni (x, y, z) \mapsto z \in [-1, 1]$. Ukažte, že f je hladká funkce.

Zobrazení $f: M \rightarrow N$ hladkých variet M , $\dim M = m$, s atlasem $\{(U_i, \varphi_i)\}$, $i \in I$ a N , $\dim N = n$, s atlasem $\{(V_k, \psi_k)\}$, $k \in K$ je **hladké**, jsou-li hladká zobrazení

$$\psi_k \circ f \circ \varphi_i^{-1}: \mathbf{R}^m \supset \varphi_i(U_i) \mapsto \psi_k(f(U_i)) \subset \mathbf{R}^n$$

pro všechna $i \in I$ a $k \in K$. Obdobným způsobem jako pro funkce dokážeme nezávislost na volbách atlasů z daných hladkých struktur. Hladké bijekce variet, jejíž inverze je rovněž hladká, říkáme **difeomorfizmus**. O dvojici variet, mezi nimiž existuje difeomorfizmus, říkáme, že jsou **difeomorfní**. Difeomorfní variety můžeme pro všechny účely považovat za stejné, hladké variety obvykle klasifikujeme až na difeomorfizmus $f: M \rightarrow M$.

Příklad 23. Vezměme hladké variety $M = (\mathbf{R}, [A])$ a $N = (\mathbf{R}, [B])$. Potom zobrazení $f: M \rightarrow N$ dané předpisem $f: x \mapsto x^3$ je difeomorfizmem hladkých variet M a N . Difeomorfní hladké variety obvykle rovněž ztotožňujeme, tj. považujeme je za ekvivalentní.

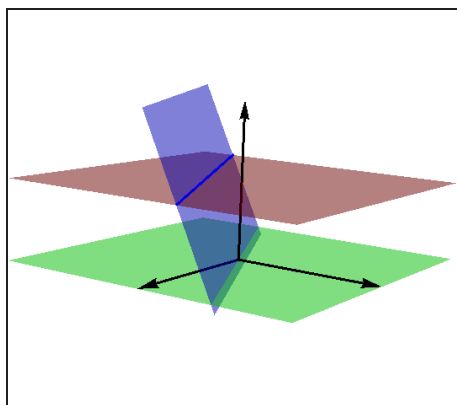
Příklad 24. Na topologické varietě \mathbf{R}^4 existuje nespočetně mnoho neekvivalentních hladkých struktur, na druhé straně existují topologické variety, na nichž neexistuje žádná hladká struktura. Vysvětlení těchto skutečností ovšem přesahuje úvodní charakter této přednášky.

Příklad 25. Vezměme hladkou varietu \mathbf{S}^1 z příkladu 14 a definujme relaci ekvivalence $\mathbf{S}^1 \ni (x, y) \sim (-x, -y) \in \mathbf{S}^1$. Potom na množině tříd ekvivalence \mathbf{S}^1 / \sim lze zavést strukturu hladké variety tak, že projekce $p: \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{S}^1 / \sim$ reprezentanta na jeho třídu je hladké zobrazení. Této projekci se říká **pokrývající zobrazení**, vzhledem k tomu, že každý bod v oboru hodnot p má otevřené okolí, jež je difeomorfní několika (v tomto případě dvěma) otevřeným okolím v definičním oboru. Dokažte to!

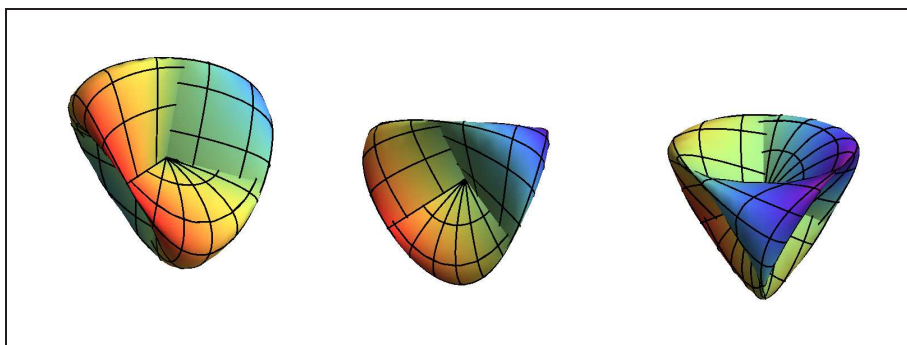
Příklad 26. Hladkou varietu \mathbf{RP}_1 z příkladu 12 lze reprezentovat i jiným způsobem, a to jako \mathbf{S}^1 / \sim . To je zřejmé například z následující úvahy: bod na kružnici můžeme zadat jednotkovým směrovým vektorem $s \in \mathbf{R}^2$. Tento vektor s rovněž zadává přímku procházející počátkem, stejnou přímku zadává ale $i - s$.

Příklad 27. Restrikcí definičního oboru zobrazení $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, $f: (x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$ (komplexní druhá mocnina) na kružnici \mathbf{S}^1 a uvážením relace ekvivalence dostáváme rovněž zobrazení $\tilde{f}: \mathbf{RP}_1 = \mathbf{S}^1 / \sim \rightarrow \mathbf{R}^2$, toto zobrazení hladce vkládá varietu \mathbf{RP}_1 do \mathbf{R}^2 . Ověřte!

Příklad 28. Uvažujme množinu \mathbf{RP}_2 všech přímek v rovině. Přímky můžeme reprezentovat jako průniky rovin v prostoru \mathbf{R}^3 procházejících počátkem s rovinou $z = 1$. Rovina $z = 0$ je speciální, odpovídá přímce umístěné v nekonečnu. Za vzdálenost dvou přímek můžeme považovat např. úhel takto jim příslušných rovin. Nalezněte na \mathbf{RP}_2 vhodný atlas analogicky jako pro \mathbf{RP}_1 a tím zadejte na \mathbf{RP}_2 hladkou strukturu. \mathbf{RP}_2 lze také reprezentovat pomocí relace ekvivalence. Rovinu procházející počátkem lze reprezentovat jednotkovým normálovým vektorem s , tedy $s \in \mathbf{S}^2$. Ale vektor $-s$ určuje stejnou rovinu jako s . Proto $\mathbf{RP}_2 = \mathbf{S}^2 / \sim$, kde $(x, y, z) \sim (-x, -y, -z)$. Tímto způsobem lze \mathbf{RP}_2 vložit do \mathbf{R}^4 .



Uvažujme zobrazení $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^4$, $f: (x, y, z) \mapsto (y^2 - z^2, 2yz, 2xy, 2xz)$, jehož definiční obor zúžíme na \mathbf{S}^2 a které zadává zobrazení $\tilde{f}: \mathbf{S}^2 / \sim \rightarrow \mathbf{R}^4$ vzhledem k tomu, že jeho složky jsou homogenní polynomy stupně 2. Popište toto zobrazení pomocí zkonstruovaného atlasu. Projekce do posledních tří složek $g: \mathbf{S}^2 \ni (x, y, z) \mapsto (2yz, 2xy, 2xz)$ je známa jako Steinerova nebo Římská plocha.



Příklad 29. ★ Reprezentujte \mathbf{RP}_2 jako faktorprostor jednotkového uzavřeného disku

\mathbf{D}^2 , kde ztotožňujeme protilehlé body na hraniční kružnici.

Příklad 30. Lieovy grupy. Lieova grupa G je hladká varieta se strukturou grupy, kde násobení $\mu: G \times G \rightarrow G$ je hladké zobrazení. (Dá se ukázat, že inverze $\iota: G \rightarrow G$ je potom rovněž hladké zobrazení.)

2. Tečný prostor, tečné zobrazení, podvariety, vektorové bandly

Infinitezimální počet na varietách se odvíjí od pojmu tečného vektoru, prostor všech tečných vektorů hladké variety je rovněž hladkou varietou. Výchozí myšlenkou je možnost aproximace okolí libovolného bodu $p \in M$ lineárním prostorem. U variet, jež jsou podmnožinami v \mathbf{R}^3 jsme již s těmito pojmy obeznámeni: jedná se o tečnu ke křivce v daném bodě p , popř. tečnou rovinu k ploše v p . Nyní popíšeme konstrukci tečných vektorů a tečného prostoru podrobněji.

2.1. Tečné vektory. Uvažujme *jednoduchou hladkou křivku* procházející bodem p hladké variety M , tj. hladké zobrazení $c: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$, $\epsilon > 0$, takové, že $c(0) = p$. Na množině křivek procházejících bodem $p \in M$ zavedeme následující relaci ekvivalence

$$c \sim \bar{c} \quad \text{právě když} \quad \frac{d\varphi \circ c(0)}{ds} = \frac{d\varphi \circ \bar{c}(0)}{ds},$$

kde φ je mapa v okolí bodu p .

Příklad 31. Ukažte, že předchozí relace ekvivalence je dobře definována, tj. že nezávisí na volbě mapy φ z dané hladké struktury.

Třídu ekvivalence $[c]_p$ křivek procházejících bodem $p \in M$ nazýváme *tečným vektorem* v bodě p . Na množině tečných vektorů $T_p M$ v bodě $p \in M$ zavedeme strukturu vektorového prostoru pomocí mapy φ ; definujeme

$$(d\varphi)_p: T_p M \rightarrow \mathbf{R}^n, \quad (d\varphi)_p: [c]_p \mapsto (d\varphi)_p([c]_p) = \frac{d\varphi \circ c(0)}{ds}$$

Ukážeme, že se jedná o bijekci. Injektivita je zřejmá z definice relace ekvivalence, surjektivitu dokážeme přímou konstrukcí. Vezměme libovolný vektor $v \in \mathbf{R}^n$ musíme nalézt křivku c , jež je reprezentantem tečného vektoru $[c]_p$ tak, že $(d\varphi)_p([c]_p) = v$. Ale takovou křivkou je např. $c: s \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(p) + sv)$.

Příklad 32. Definujte nějaký tečný vektor v projektivní rovině \mathbf{RP}_1 v bodě, který odpovídá přímce $y = x$.

U předchozí definice tečného vektoru mnohé závisí na volbě mapy φ . Je ovšem žádoucí, aby definované pojmy na volbě mapy nezávisely, proto teď zvolíme jiný postup. Tečné vektory lze totiž interpretovat algebraicky, jako derivace v bodě. Definujme například některé základní pojmy, které jsou potřebné pro tento přístup. *Algebra* A (nad tělesem \mathbf{R}) je vektorový prostor, na kterém je definována bilineární operace násobení $A \times A \rightarrow A$.

Příklad 33. Ukažte, že násobení dané vektorovým součinem \times na vektorovém prostoru \mathbf{R}^3 určuje algebru. Je toto násobení komutativní resp. asociativní?

Příklad 34. Ukažte, že Hamiltonovy kvaterniony \mathbf{H} jsou algebrou. Obecný kvaternion zapisujeme jako $a + bi + cj + dk$, přičemž platí, že $ij = k, jk = i, ki = j, i^2 = j^2 = k^2 = -1$.

Příklad 35. Reálné funkce na libovolné množině tvoří algebru vzhledem k násobení zadanému bodově $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$. Toto násobení je komutativní a asociativní.

Příklad 36. Reálné hladké funkce na hladké varietě M tvoří algebru vzhledem k násobení z předchozího příkladu. Značíme ji $C^\infty(M)$. Reálné lineární kombinace hladkých funkcí a součin dvou hladkých funkcí jsou totiž hladkými funkcemi.

Na algebře hladkých funkcí definovaných v okolí bodu p v \mathbf{R}^n zavedeme následující relaci ekvivalence. Funkce f a g jsou ekvivalentní, existuje-li otevřené okolí U bodu p tak, že

$$f|_U = g|_U.$$

Patřičnou třídu ekvivalence $[f]$ nazýváme *zárodek* v bodě p . Množinu všech zárodků v bodě p označíme $C_p^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Příklad 37. Funkce

$$f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{1\} \quad \text{a} \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad x \in (-1, 1)$$

mají stejný zárodek v jakémkoli bodě otevřeného intervalu $(-1, 1)$.

Derivaci D ve směru vektoru v v bodě p na \mathbf{R}^n lze chápat (definice) jako lineární zobrazení

$$D_v: C_p^\infty(\mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{R},$$

které splňuje *Leibnizovo pravidlo*:

$$D_v(f \cdot g) = (D_v f)g(p) + f(p)(D_v g).$$

Vzhledem k tomu, že množina všech lineárních zobrazení tvoří vektorový prostor, máme následující lineární zobrazení A :

$$A: v \mapsto D_v = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p,$$

kteřé vektoru v bodě p přiřazuje derivaci v bodě p .

Derivace D v bodě p splňuje $D(c) = 0$ pro libovolnou konstantní funkci c . Zřejmě $D(c) = cD(1)$ z linearity, stačí tedy ukázat, že $D(1) = 0$. Máme ovšem $D(1) = D(1.1) = 1.D(1) + D(1).1 = 2.D(1)$.

Lemma 1. *Zobrazení A je izomorfismus vektorových prostorů.*

Důkaz. Napřed dokážeme, že A je injektivní. Vzhledem k linearitě stačí ukázat, že je-li $A(v) = 0$, potom i $v = 0$. Předpokládejme tedy, že $D_v = 0$ a aplikujme jej na souřadnicové funkce x^j .

$$0 = D_v(x^j) = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial x^j}{\partial x^i} \Big|_p = v^i \delta_i^j = v^i$$

a tedy $v = 0$.

Nyní dokážeme, že A je surjektivní. Necht' D je derivace v bodě p a funkce f je reprezentantem zárodku v $C_p^\infty(\mathbf{R}^n)$. Uvažujme hvězdicovité okolí U bodu p . Pro každé $x \in U$ tedy platí, že úsečka $p + (x - p)t$, $0 \leq t \leq 1$ leží v U a $f(p + (x - p)t)$ je definovaná pro $0 \leq t \leq 1$. Potom platí

$$\frac{d}{dt} f(p + (x - p)t) = \sum_{i=1}^n (x^i - p^i) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p + (x - p)t)$$

podle pravidel o derivování složené funkce. Pravou i levou stranu nyní zintegrujeme.

$$[f(p + (x - p)t)]_0^1 = \sum_{i=1}^n (x^i - p^i) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(p + (x - p)t) dt.$$

Označme

$$\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(p + (x - p)t) dt = g_i(x).$$

Potom $g_i(x) \in C^\infty(U)$ a dostáváme tzv. *Taylorovu větu se zbytkem*

$$f(x) - f(p) = \sum_{i=1}^n (x^i - p^i) g_i(x), \tag{1}$$

navíc

$$g_i(p) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p).$$

Na obě strany (1) aplikujme D a využijme skutečnosti, že derivace konstantní funkce je rovna nule a Leibnizova pravidla.

$$\begin{aligned} Df(x) &= \sum_{i=1}^n (D(x^i - p^i))g_i(p) + (p^i - p^i)(Dg_i(x)) \\ &= \sum_{i=1}^n D(x^i)g_i(p) = \sum_{i=1}^n D(x^i) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p). \end{aligned}$$

Tím jsme dokázali, že $D = D_v$ pro $v = (Dx^1, \dots, Dx^n)$. □

Tímto způsobem můžeme vektory v v p identifikovat s derivacemi, standardní bázi (e_1, \dots, e_n) v bodě p přísluší parciální derivace $(\partial/\partial x^1|_p, \dots, (\partial/\partial x^n|_p)$.

Příklad 38. Aplikujte Taylorovu větu se zbytkem na funkci $f(x, y) = x \sin y$ v bodě $(1, 0)$.

Napřed definujeme zárodek $[f]$ hladké funkce f v bodě p na varietě M , algebra všech zárodků označme $C_p^\infty(M)$. **Tečný vektor v bodě p** na hladké varietě M je derivace v bodě $p \in M$, tj. lineární zobrazení $D: C_p^\infty(M) \rightarrow \mathbf{R}$, které splňuje Leibnizovo pravidlo

$$D(fg) = (Df)g(p) + f(p)(Dg).$$

Algebra zárodků $C_p^\infty(U)$ v otevřené podvarietě $U \subset M$, $p \in M$ je shodná s algebrou zárodků $C_p^\infty(M)$.

Vyjádřeme nyní tečný vektor pomocí souřadnicové mapy (U, φ) , $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$. Buďte $\rho = (r^1, \dots, r^n)$ standardní souřadnicové funkce na \mathbf{R}^n . Potom

$$x^i = r^i \circ \varphi: U \rightarrow \mathbf{R}.$$

Buď f hladká funkce definovaná na nějakém okolí bodu $p \in U \subset M$. Položme

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p f = \frac{\partial}{\partial r^i} \Big|_{\varphi(p)} f \circ \varphi^{-1} \in \mathbf{R}.$$

Jednoduše ověříme, že $\partial/\partial x^i|_p$ je derivace v bodě p .

Tečné vektory v bodě $p \in M$ tvoří vektorový prostor, tzv. **tečný prostor** $T_p M$ v bodě $p \in M$.

Tvrzení 2 (Matice přechodu pro souřadnicová vyjádření vektorů). *Buďte $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ a $(V, \psi = (y^1, \dots))$ dvě mapy na varietě M . Potom*

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j}$$

na $U \cap V$.

Důkaz. V každém bodě $p \in U \cap V$ jsou $(\partial/\partial x^i|_p)$ a $(\partial/\partial y^i|_p)$ báze tečných vektorů v $T_p M$. Existuje tedy regulární matice $a_i^j(p) \in \mathbf{R}$ tak, že

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{j=1}^n a_i^j \frac{\partial}{\partial y^j}.$$

Obě strany rovnosti aplikujeme na y^k a dostaneme

$$\frac{\partial y^k}{\partial x^i} = \sum_{j=1}^n a_i^j \frac{\partial y^k}{\partial y^j} = \sum_{j=1}^n a_i^j \delta_j^k = a_i^k.$$

□

Příklad 39. Vyjádřete tečný vektor $\xi = A\partial/\partial x|_p + B\partial/\partial y|_p$ v $p \in \mathbf{R}^2$ v polárních souřadnicích $x = r \cos \varphi$ a $y = r \sin \varphi$.

Příklad 40. Vyjádřete tečný vektor $\xi = A\partial/\partial x|_p + B\partial/\partial y|_p$ v $p \in \mathbf{R}^2$ v parabolických souřadnicích $x = uv$ a $y = (u^2 - v^2)/2$.

Příklad 41. Vyjádřete tečný vektor $\xi = A\partial/\partial u|_N + B\partial/\partial v|_N$ na severním pólu sféry v souřadnicích určených projekcemi do souřadnicové roviny xy .

2.2. Tečné zobrazení. Bud' $F: M \rightarrow N$ hladké zobrazení. V každém bodě $p \in M$ indukuje F lineární zobrazení tečných prostorů, tzv. *diferenciál* v bodě p ,

$$F_*: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$$

následujícím způsobem. Vezměme $\xi \in T_p M$, potom $F_* \xi$ je definováno jako

$$(F_* \xi)f = \xi(f \circ F) \in \mathbf{R}, \text{ pro } f \in C_{F(p)}^\infty(N).$$

Pokud chceme zdůraznit skutečnost, že diferenciál uvažujeme v bodě $p \in M$, píšeme někdy $F_{*,p}$.

Příklad 42. Pokud $F: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ a na \mathbf{R}^n i \mathbf{R}^m uvažujeme standardní souřadnicové funkce, potom je F_* v bodě $p \in \mathbf{R}^n$ dáno Jacobiho maticí.

Příklad 43. Spočtete diferenciál zobrazení z příkladu 28 v libovolném bodě.

Příklad 44. Buď

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

diferenciál zobrazení $F: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ v bodě p vyjádřený ve standardních souřadnicích. Spočtete diferenciál tohoto zobrazení v polárních souřadnicích.

Buďte $F: M \rightarrow N$ a $G: N \rightarrow P$ hladká zobrazení hladkých variet. Diferenciály $F_{*,p}$ a $G_{*,F(p)}$ jsou lineární zobrazení

$$T_p M \xrightarrow{F_{*,p}} T_{F(p)} N \xrightarrow{G_{*,F(p)}} T_{G(F(p))} P$$

Věta 3 (Řetězové pravidlo). *Platí*

$$(G \circ F)_{*,p} = G_{*,F(p)} F_{*,p}.$$

Důkaz. Necht' $\xi \in T_p M$ a $f \in C_{G(F(p))}^\infty(P)$. Potom

$$((G \circ F)_{*,p} \xi) f = \xi(f \circ G \circ F),$$

ale také

$$((G_{*,F(p)} F_{*,p}) \xi) f = (G_{*,F(p)}(F_{*,p} \xi)) f = (F_{*,p} \xi)(f \circ G) = \xi(f \circ G \circ F).$$

□

Předchozí věta má důležité důsledky. Je-li $F: M \rightarrow N$ difeomorfismus, $p \in M$ potom $F_*: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ je izomorfismus. Zjevně $G \circ F = \text{id}_M$ a $F \circ G = \text{id}_N$ odtud pomocí věty 3

$$(G \circ F)_* = G_* F_* = (\text{id}_M)_* = 1_{T_p M}, \quad (F \circ G)_* = F_* G_* = (\text{id}_N)_* = 1_{T_{F(p)} N}.$$

Dále máme tzv. invarianci dimenze. Jsou-li $U \subset \mathbf{R}^n$, $V \subset \mathbf{R}^m$ a je-li $F: U \rightarrow V$ difeomorfismus, potom $m = n$ na základě prvního důsledku.

Tvrzení 4 (Souřadnicové vyjádření diferenciálu). *Buď $F: M \rightarrow N$ hladké zobrazení variet, $p \in M$ bod, $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ mapa v okolí p a $(V, \psi = (y^1, \dots, y^m))$ mapa v okolí $F(p)$. Potom vzhledem k bazím $(\partial/\partial x^i|_p)_{i=1, \dots, n}$ v $T_p M$ a $(\partial/\partial y^i|_{F(p)})_{i=1, \dots, m}$ v $T_{F(p)} N$ je diferenciál $F_{*,p}$ reprezentován maticí*

$$\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(p),$$

kde $F^i = y^i \circ F$ jsou složky F .

Příklad 45. Tečný vektor $c'(t)$ (*rychlost*) k hladké křivce $c: (a, b) \rightarrow M$ v bodě $t \in (a, b)$ je dán jako

$$c_{*,t} \left(\frac{d}{ds} \Big|_t \right),$$

kde s je standardní souřadnice na (a, b) .

Tvrzení 5 (Existence křivky s daným počátečním tečným vektorem). *Pro každý bod $p \in M$ a každý tečný vektor $\xi \in T_p M$ existuje hladká křivka $c: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ tak, že $c(0) = p$ a $c'(0) = \xi$.*

Důkaz. Zvolme mapu $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ tak, že $x^1(p) = \dots = x^n(p) = 0$ a vyjádřeme $\xi = \sum a^i \partial/\partial x^i|_p$. Potom $c(t) = \varphi^{-1}(a^1 t, \dots, a^n t)$. \square

Nyní uvedeme další způsob jak spočítat tečné zobrazení, který má velkou praktickou použitelnost.

Tvrzení 6. *Bud' $F: M \rightarrow N$ hladké zobrazení variet, $p \in M$ bod a $\xi \in T_p M$ tečný vektor v tomto bodě. Je-li c hladká křivka procházející bodem p , jejíž rychlost v bodě p je rovna ξ , potom*

$$F_{*,p}(\xi) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} F \circ c(t).$$

Tečný vektor $F_{,p}(\xi)$ je tedy vektorem rychlosti obrazu křivky c zobrazením F v bodě $F(p)$.*

Důkaz. Vzhledem k předpokladům platí $c(0) = p$ a $c'(0) = \xi$. Dále platí

$$F_{*,p}(\xi) = F_{*,p}(c'(0)) = F_{*,p}c_{*,0} \left(\frac{d}{dt} \Big|_0 \right) = (F \circ c)_{*,0} \left(\frac{d}{dt} \Big|_0 \right) = \frac{d}{dt} \Big|_0 F \circ c(t).$$

\square

Hodnost hladkého zobrazení $F: M \rightarrow N$ v bodě $p \in M$ je hodnost tečného zobrazení $F_{*,p}$. Uvědomme si, že vzhledem k nezávislosti definice tečného vektoru na souřadnicových mapách nemusíme dokazovat nezávislost hodnosti hladkého zobrazení na volbě těchto map.

Bod $p \in M$ nazveme *kritickým bodem* F , pokud $F_{*,p}$ není surjektivní, jinak je *regulárním bodem*. *Kritickou hodnotou* nazveme obraz $F(p)$ kritického bodu p , ostatní body $q \in N$ jsou *regulárními hodnotami* F .

Příklad 46. Určete kritické body a hodnoty zobrazení z příkladu 28.

Příklad 47. Tečný prostor ke kartézskému součinu. Buďte M, N hladké variety a $\pi: M \times N \rightarrow M, \rho: M \times N \rightarrow N$ projekce na první a druhý faktor. Dokažte, že pro $(p, q) \in m \times N$ je

$$\pi_* \times \rho_*: T_{(p,q)} M \times N \rightarrow T_p M \times T_q N$$

izomorfizmem vektorových prostorů.

Příklad 48. Diferenciály násobení a inverze na Lieově grupě. Ukažte, že diferenciálem násobení μ v bodě (e, e) , kde e je identita na G , je sčítání a diferenciálem inverze ι v e je opačná hodnota.

2.3. Podvariety. Podmnožina $N \subset M$ hladké variety M je *regulární podvarietou* dimenze k hladké variety M , pokud pro každý bod $p \in N$ existuje mapa $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ v $M, p \in U$, tak, že průnik $U \cap N$ je definován vymizením posledních $n - k$ souřadnicových funkcí. Mapu (U, φ) nazýváme *adaptovanou* k podvarietě N . Na $U \cap N$ je totiž

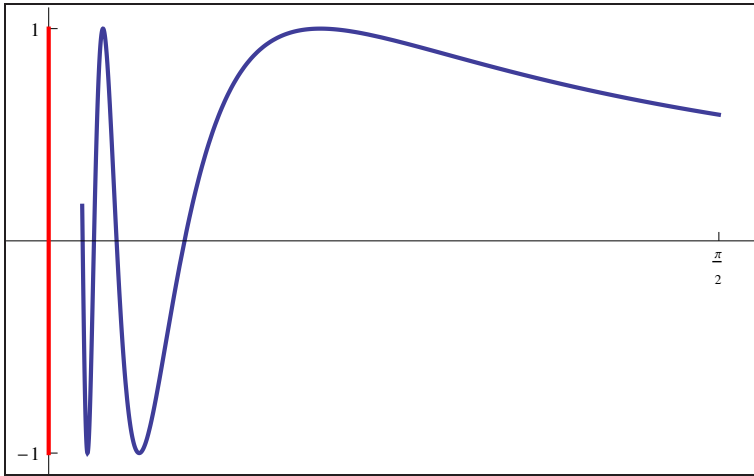
$$\varphi = (x^1, \dots, x^k, \underbrace{0, \dots, 0}_k)$$

a zúžením $\varphi_N = (x^1, \dots, x^k)$ na $U \cap N$ získáme mapu na N . Číslo $n - k$ nazýváme *kodimenze* podvariety N ve varietě N .

Příklad 49. Otevřený jednotkový čtverec $M = (0, 1) \times (0, 1)$ je hladkou varietou. Ukažte, že úsečka $(t, 1/2), 0 \leq t \leq 1$ je podvarietou M .

Příklad 50. Ukažte, že rovník je hladkou podvarietou na jednotkové sféře \mathbf{S}^2 .

Příklad 51. Topologova sinusovka. Uvažme graf $\Gamma(f)$ hladké funkce $f(x) = \sin 1/x, x \in (0, \pi/2) \subset \mathbf{R}^2$ a úsečku $I = \{(0, y) \in \mathbf{R}^2 \mid -1 < y < 1\}$. Sjednocení $\Gamma(f) \cup I$ není regulární podvarietou v \mathbf{R}^2 . Pokud totiž vezmeme libovolné okolí bodu $p \in I$, tak jeho průnik s $\Gamma(f)$ má nekonečně mnoho komponent.



Dalším způsobem jak zadat hladkou varietu je implicitně jako *vrstevnici* regulární hodnoty c hladkého zobrazení $F: M \rightarrow N$, tj.

$$F^{-1}(\{c\}) = \{p \in M \mid f(p) = c\}.$$

Příklad 52. Jednotková sféra \mathbf{S}^2 je vrstevnicí regulární hodnoty $c = 0$ hladkého zobrazení $F: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$, $(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Nyní použijeme větu o inverzní funkci a nalezneme mapy v \mathbf{R}^3 adaptované na \mathbf{S}^2 . Platí

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z,$$

a tedy jediným kritickým bodem je $(0, 0, 0)$ jež ale neleží na \mathbf{S}^2 . Hodnota $c = 0$ je tedy regulární hodnotou F . Buď $p \in \mathbf{S}^2$ takový bod, že $\partial F / \partial z(p) = 2z(p) \neq 0$. Potom je Jacobiho matice zobrazení

$$\varphi: (x, y, z) \mapsto (x, y, F(x, y, z))$$

rovna

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$$

a je regulární. Podle věty o inverzní funkci má tedy φ hladkou inverzi v nějakém okolí U bodu p a (U, φ) je adaptovanou mapou. Obdobně budeme postupovat pro $\partial F / \partial x(p) = 2x(p) \neq 0$ a $\partial F / \partial y(p) = 2y(p) \neq 0$. Tímto způsobem pokryjeme celou \mathbf{S}^2 adaptovanými mapami a \mathbf{S}^2 je tedy regulární podvarieta v \mathbf{R}^3 .

Věta 7 (Věta o regulární vrstevnici). *Bud' $F: M \rightarrow N$ je hladké zobrazení, $\dim M = n$, $\dim N = m$. Potom neprázdná vrstevnice $F^{-1}(\{c\})$ regulární hodnoty c je regulární podvarietou variety M dimenze $n - m$.*

Požadavek, aby c byla regulární hodnota F , lze nahradit požadavkem o maximální hodnotě F_* v bodech $F^{-1}(\{c\})$ a tento požadavek lze dále oslabit na pouhou konstantnost hodnoty F_* v těchto bodech.

Důkaz. Důkaz věty provede jeden z vás jako součást požadavků k zápočtu. □

Příklad 53. Ukažte, že řešení rovnice $x^3 + y^3 + z^3 = 1$ tvoří regulární podvarietu v \mathbf{R}^3 .

Příklad 54. Rozhodněte, zda řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned}x^3 + y^3 + z^3 &= 1, \\x + y + z &= 0.\end{aligned}$$

tvoří regulární podvarietu v \mathbf{R}^3 .

Příklad 55. Speciální lineární grupa $SL(n)$. Množinově je $SL(n)$ podmnožinou $GL(n)$ tvořenou maticemi s jednotkovým determinanem. Ukažte, že $SL(n)$ je regulární podvarietou $GL(n)$ dimenze $n^2 - 1$.

Příklad 56. Graf hladkého zobrazení $F: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ je hladkou podvarietou v \mathbf{R}^{n+m} .

Příklad 57. ★ Hladká projektivní nadplocha. Nuly homogenního polynomu

$$F(z_0, \dots, z_n) = 0$$

jsou dobře definovány na \mathbf{RP}^n , protože

$$F(tz_0, \dots, tz_n) = t^k F(z_0, \dots, z_n) = 0, \text{ pro } t \neq 0.$$

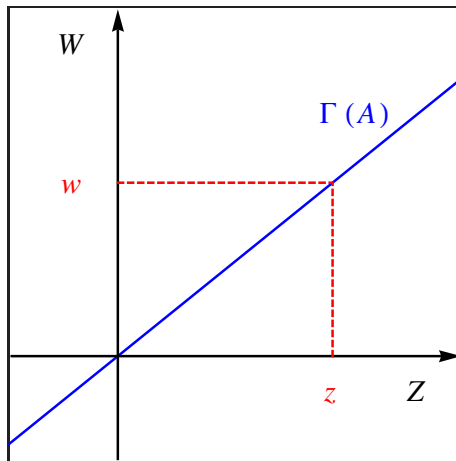
Nalezněte podmínky, kdy nuly homogenního polynomu určují regulární podvarietu v \mathbf{RP}^n .

Příklad 58. ★ Grassmanián $\mathcal{G}(k, n)$. Bud' V vektorový prostor, $\dim V = n$ a $W \subset V$ vektorový podprostor, $\dim W = k$. Množinově definujeme Grassmanián $\mathcal{G}(n, k) = \{W \subset V \mid \dim W = k\}$ jako množinu všech k -rozměrných poprostorů ve V . V dalším ukážeme, že $\mathcal{G}(n, k)$ je hladkou varietou.

Napřed ukážeme, že $\mathcal{G}(n, k)$ je metrický prostor. Zvolme na V libovolně skalární součin $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Metriku definujeme jako $d(Z, W) = \|P_Z - P_W\|$, kde P_Z je projekční operátor s jádrem $Z^\perp = \{v \in V \mid \langle z, v \rangle = 0, \forall z \in Z\}$ a obrazem Z a $\|A\|$ je tzv. operátorová norma

A , tj. v absolutní hodnotě největší vlastní hodnota A . Separabilita je zřejmá pomocí reprezentace podprostoru Z pomocí operátoru $P_Z: V \rightarrow V$, jež má hodnotu k . Jelikož metrický prostor všech operátorů $V \rightarrow V$ je separabilní, je separabilní i každý jeho metrický podprostor.

Nyní zkonstruujeme mapy na $\mathcal{G}(n, k)$. Buďte $Z, W \subset V$ komplementární podprostory ve V , tj. $Z \oplus W = V$, $\dim Z = k$ a tedy $\dim W = n - k$. Vezměme libovolné lineární zobrazení $A: Z \rightarrow W$ a uvažujme jeho graf $\Gamma(A) = \{z + Az \mid z \in Z\}$ jako podprostor v $Z \oplus W = V$. Všimněme si, že $\Gamma(A) \cap W = \{0\}$. Je-li totiž $z + Az \in \Gamma(A) \in W$, potom nutně $z + Az \in W$ a tedy i $z \in W$. Ale vzhledem k tomu, že $W \cap Z = \{0\}$, je $z = 0$. Nyní dokážeme: Každý vektorový podprostor $S \subset V$, pro který je $S \cap W = \{0\}$ je grafem jediného lineárního zobrazení $A: Z \rightarrow W$. Pro každé $s \in S$ máme jednoznačný rozklad $s = z + w$, kde $z \in Z$ a $w \in W$. Položme $Az = w$. Zobrazení A je dobře definované: Uvažujme $s = z + w$ a $s' = z + w'$. Odtud plyne $S \ni s - s' = w - w' \in W$. Zobrazení A je zjevně lineární.



Označme $L(Z, W)$ vektorový prostor lineárních zobrazení $Z \rightarrow W$ a dále U_W podmnožinu $\mathcal{G}(n, k)$ takovou, že průniky jejich prvků s W jsou triviální, tj.

$$U_W = \{S \in \mathcal{G}(n, k) \mid S \cap W = \{0\}\}.$$

Definujme dále zobrazení $\psi_W: L(Z, W) \rightarrow U_W$ pomocí výše uvedené konstrukce. V diskusi jsme si ukázali, že ψ_W je bijekce. Spojitost ψ_W a $\varphi_W = \psi_W^{-1}$ je rovněž zjevná. Pokud v Z a W zvolíme báze, můžeme $L(Z, W)$ identifikovat s prostorem všech matic $k \times (n - k)$ a dvojice (U_W, φ_W) je mapou na $\mathcal{G}(n, k)$. Pro každý podprostor S lze najít W tak, že $S \cap W = \{0\}$, takovými mapami tedy lze pokrýt celý metrický prostor $\mathcal{G}(n, k)$ a tím jsme ukázali, že $\mathcal{G}(n, k)$ je topologickou varietou dimenze $k(n - k)$.

Dále ověříme, že $\mathcal{G}(n, k)$ je hladkou varietou. Uvažme tedy dva rozklady $V = Z \oplus W = Z' \oplus W'$, kde $\dim Z = \dim Z' = k$ a k nim patříci mapy (U_W, φ_W) a $(U_{W'}, \varphi_{W'})$. Zjevně platí, že $\varphi_W(U_W \cap U_{W'})$ je otevřená množina ve vektorovém prostoru všech matic $k \times (n - k)$. Zbývá tedy ukázat hladkost zobrazení

$$\varphi_{W'} \circ \varphi_W^{-1}: \varphi_W(U_W \cap U_{W'}) \rightarrow \varphi_{W'}(U_W \cap U_{W'}).$$

Bud' tedy $A \in \varphi_W(U_W \cap U_{W'}) \subset L(Z, W)$ libovolné. Označme $S \subset V$ podprostor ve V takový, že platí $S = \varphi_W^{-1}(A) = \Gamma(A)$. Položme $A' = \varphi_{W'} \circ \varphi_W^{-1}(A)$. Dle dřívější definice je A' jediným lineárním zobrazením $Z' \rightarrow W'$, jehož grafem je S . Bud' $z' \in Z'$. Uvědomme si, že $A'z'$ je jediný prvek W' takový, že $z' + A'z' \in S$, tj.

$$z' + A'z' = z + Az, \quad \text{pro nějaké } z \in Z$$

Ve skutečnosti existuje právě jedno takové $z \in Z$, je charakterizováno tím, že

$$z + Az - z' \in W'.$$

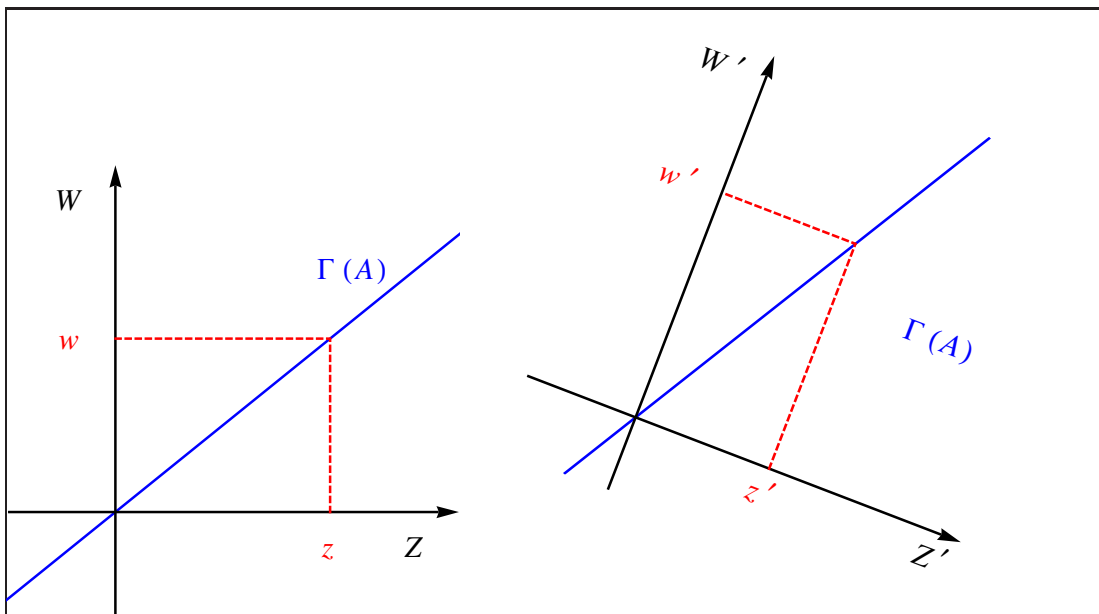
Označme $\iota_A: Z \rightarrow V$ lineární zobrazení $\iota_A(z) = z + Az$ a bud' $\pi_{Z'}: V \rightarrow Z'$ projekce s jádrem W' a obrazem Z' . Potom platí

$$0 = \pi_{Z'}(z + Az - z') = \pi_{Z'}(\iota_A(z)) - z'.$$

Zobrazení $\pi_{Z'} \iota_A$ je pro $A \in \varphi_W(U_W \cap U_{W'})$ invertibilní a dostáváme tedy $z = (\pi_{Z'} \iota_A)^{-1}(z')$. Z toho plyne, že A' lze vyjádřit pomocí A jako

$$A'z' = \iota_A z - z' = \iota_A \circ (\pi_{Z'} \iota_A)^{-1}(z') - z'.$$

Zobrazení ι_A je zjevně lineární a proto hladké, inverzní zobrazení ke kompozici lineárních zobrazení $(\pi_{Z'} \iota_A)^{-1}$ je rovněž hladké zobrazení (existence je zaručena z předpokladů) a proto i jejich kompozice je hladkým zobrazením.



Poznamenejme dále, že $\mathcal{G}(n, k)$ lze pokrýt konečným počtem map. Zvolme za tímto účelem bázi (e_1, \dots, e_n) ve V . Potom každému rozkladu prvků báze do dvou disjunktních podmnožin o k resp. $n - k$ prvcích zjevně odpovídá jedna volba Z a W a tyto dohromady pokrývají $\mathcal{G}(n, k)$.

Příklad 59. ★ Grassmanián jako podvarieta v projektivním prostoru — Plückerovo vložení. Další možnost jak definovat grassmanián $\mathcal{G}(n, k)$ je využití věty o regulární vrstevnici. Podprostor $Z \subset V$, $\dim Z = k$ je zadán k -ticí vektorů (z_1, \dots, z_k) . Těmto vektorům přiřadíme prvek $z_1 \wedge \dots \wedge z_k \in \Lambda^k V$. Ovšem stejný podprostor Z je určen i k -ticí $(z'_1, \dots, z'_k) = A(z_1, \dots, z_k)$, kde $A \in \text{GL}(k)$. Těto k -tici se přiřadí $z'_1 \wedge \dots \wedge z'_k = \det A z_1 \wedge \dots \wedge z_k \in \Lambda^k V$. Tímto pravidlem je tedy definováno zobrazení

$$\psi: \text{Mat}(n, k) \rightarrow P\Lambda^k V$$

do projektivního prostoru k vektorovému prostoru $\Lambda^k V$. Grassmanián je určen tzv. rozložitelnými prvky $\omega \in \Lambda^k V$, tj. prvky, jež jsou v nějaké bázi (e_1, \dots, e_n) vyjádřitelné jako $\omega = e_1 \wedge \dots \wedge e_k$. Ekvivalentní podmínka k rozložitelnosti je následovná: Uvažme lineární zobrazení $\eta_\omega: V \rightarrow \Lambda^{k+1} V$ dané předpisem

$$\eta_\omega: v \mapsto v \wedge \omega.$$

Prvek ω je rozložitelný, je-li hodnota lineárního zobrazení η_ω (menší nebo) rovna $n - k$. Ale i zobrazení

$$\eta: \Lambda^k V \rightarrow L(V, \Lambda^{k+1} V), \omega \mapsto \eta_\omega$$

je lineární a $\mathcal{G}(n, k)$ je podvarieta v $\text{Mat}(n, k)$ definovaná implicitně vymizením všech $(n - k + 1) \times (n - k + 1)$ minorů. Konstantní hodnota je zde důsledkem platnosti Cauchy–Binetova rozvoje.

2.4. Tečný bandl. Již dříve jsme zjistili, že tečný prostor $T_p M$ v bodě p hladké variety M je vektorový prostor derivací v bodě algebry zárodků $C_p^\infty(M)$. **Tečný bandl** je disjunktním sjednocením tečných prostorů ve všech bodech variety M ,

$$TM = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p M.$$

V dalším dokážeme, že TM je hladkou varieta a že se jedná o C^∞ vektorový bandl nad M . Bud' $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ mapa na M a $p \in U$. Tečný vektor $\xi \in T_p M$ má jednoznačné vyjádření

$$\xi = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p,$$

kde $a^i = a^i(\xi)$. Jelikož

$$\varphi_*(\xi) = \sum_{i=0}^n a^i \frac{\partial}{\partial r^i} \Big|_{\varphi(p)},$$

můžeme tečný vektor $\varphi_*(\xi) \in T_{\varphi(p)} \mathbf{R}^n$ ztotožnit s vektorem $a = (a^1, \dots, a^n) \in \mathbf{R}^n$. Vezměme

$$TU = \bigcup_{p \in U} \{p\} \times T_p U = \bigcup_{p \in U} \{p\} \times T_p M.$$

Definujme zobrazení

$$\begin{aligned}\Phi = (\varphi, \varphi_*) : TU &\rightarrow \varphi(U) \times \mathbf{R}^n \\ (p, \xi) &\mapsto (x^1(p), \dots, x^n(p), a^1(\xi), \dots, a^n(\xi)).\end{aligned}$$

Potom Φ je bijekce s inverzí

$$(\varphi(p), a^1, \dots, a^n) \mapsto \left(p, \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right).$$

Problém jak definovat metriku na TM ponecháme prozatím otevřený, k jeho vyřešení přistoupíme v některé následující kapitole.

V dalším ukážeme, že je-li $((U_i, \varphi_i))_{i \in I}$ hladký atlas na M , potom $((TU_i, \Phi_i))_{i \in I}$ je hladký atlas na TM . Připomeňme si, že pro dvě mapy $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ a $(V, \psi = (y^1, \dots, y^n))$, $p \in U \cap V$ a $\xi \in T_p M$ je

$$\xi = \sum a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = \sum b^i \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_p,$$

přičemž

$$b^j = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(p).$$

Potom je přechodové zobrazení

$$\Phi_i \circ \Phi_k^{-1} : \varphi_k(U_i \cap U_k) \times \mathbf{R}^n \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_k) \times \mathbf{R}^n$$

dáno jako

$$\Phi_i \circ \Phi_k^{-1} : (x, a^1, \dots, a^n) \mapsto (\varphi_k^{-1}(x), \sum a^j \frac{\partial}{\partial x^j}) \mapsto (\varphi_i \circ \varphi_k^{-1}(x), b^1, \dots, b^n),$$

kde

$$b^j = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i}.$$

Na tečném bandlu TM existuje přirozená hladká projekce $\pi : TM \rightarrow M$, $\pi((p, \xi)) = p$. Tímto se z tečného bandlu stává příklad vektorového bandlu, jehož definici nyní uvedeme.

Bud' $\pi : E \rightarrow M$ hladké zobrazení. Potom vzor bodu $p \in M$ $\pi^{-1}(\{p\})$ nazýváme *fibr* v bodě p a značíme E_p . Surjektivní hladké zobrazení nazveme *lokálně triviální řádu r* pokud

- (i) každý fibr E_p má strukturu vektorového prostoru dimenze r ,

- (ii) pro každé $p \in M$ existuje jeho otevřené okolí U a difeomorfismus Φ zachovávající fibry

$$\Phi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbf{R}^r,$$

který každý fibr E_q zobrazí na $\{q\} \times \mathbf{R}^r$ jako izomorfismus vektorových prostorů pro všechna $q \in U$.

Množina $((U_i, \Phi_i))_{i \in I}$ se nazývá *lokální trivializace* E . *Hladký vektorový bandl řádu r* je trojice $\pi: E \rightarrow M$, kde π je surjektivní hladké zobrazení variet, které je lokálně triviální řádu r . Varietu E nazýváme *totální prostor*, M *bázový prostor*.

Bud'te $\pi: E \rightarrow M$ a $\rho: F \rightarrow N$ dva vektorové bandly obecně různého řádu. *Zobrazení bandlů* je dvojice hladkých zobrazení (Ψ, ψ) , kde $\Psi: E \rightarrow F$ a $\psi: M \rightarrow N$ splňujících následující podmínky

- (i) komutuje diagram

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\Psi} & F \\ \pi \downarrow & & \downarrow \rho \\ M & \xrightarrow{\psi} & N \end{array},$$

tj. $\rho \circ \Psi = \psi \circ \pi$,

- (ii) zobrazení Ψ je lineární na fibrech, tj. pro všechna $p \in M$ je $\Psi: E_p \rightarrow F_{\psi(p)}$ lineární.

Izomorfismus bandlů je definován obdobně. V tomto případě musí být ψ difeomorfismus a každé z lineárních zobrazení $\Psi: E_p \rightarrow F_{\psi(p)}$ lineární izomorfismus.

Příklad 60. Kartézský součin $M \times V$, kde V je vektorový prostor, $\dim V = r$. Projekce je dána $\pi: M \times V \rightarrow M, (p, \xi) \mapsto p$. Lokální trivializace je dána identitou a volbou báze ve V , $\varphi: M \times V \rightarrow M \times \mathbf{R}^r, (p, \xi = \sum a^i e_i) \mapsto (p, a)$.

Pokud je vektorový bandl $\pi: E \rightarrow M$ izomorfní kartézskému součinu, nazýváme jej *triviální* bandl.

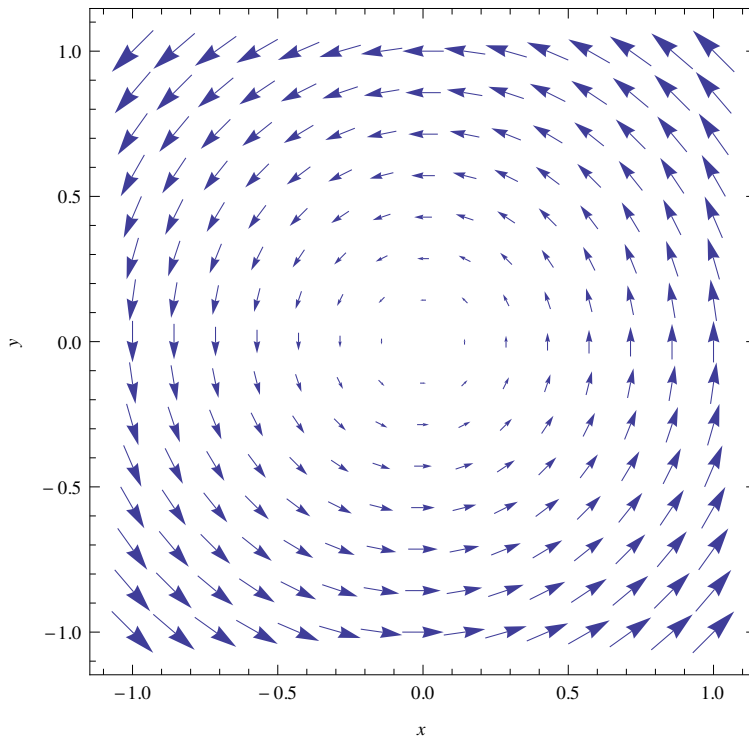
Řezem vektorového bandlu $\pi: E \rightarrow M$ nazveme zobrazení $\gamma: M \rightarrow E$, takové, že $\pi \circ \gamma = \text{id}_M$. O řezu řekneme, že je hladký, je-li hladké zobrazení $M \rightarrow E$.

(Hladké) vektorové pole ξ na varietě M je hladký řez $\xi: M \rightarrow TM$, každému bodu p variety M je tedy přiřazen tečný vektor $\xi_p \in T_p M$.

Příklad 61. Vektorové pole na \mathbf{R}^2 . Buď

$$\xi = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$$

Potom získáme následující obrázek



2.5. Konstrukce nových vektorových bandlů. Mnoho vektorových bandlů se dá přirozenými konstrukcemi vytvořit z právě zkonstruovaného tečného bandlu a to s využitím duality, přímého součtu, tenzorového součinu, symetrizací a antisymetrizací.

Duální bandl k vektorovému bandlu $\pi: E \rightarrow M$ je vektorový bandl $\pi^*: E^* \rightarrow M$, jehož fibry jsou duální vektorové prostory k fibrám $\pi: E \rightarrow M$, přičemž je-li $\Phi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbf{R}^r$ lokální trivializace bandlu E , potom $\Phi^*: \pi^{*-1}(U) \rightarrow U \times (\mathbf{R}^r)^*$ je lokální trivializace E^* . Příkladem této konstrukce je kotečný bandl zavedený v další kapitole.

Přímý součet vektorových bandlů. Buďte $\pi: E \rightarrow M$ a $\rho: F \rightarrow M$ dva vektorové bandly nad stejnou bází M . Potom fibr jejich přímého součtu $\pi \oplus \rho: E \oplus F \rightarrow M$ nad bodem $p \in M$ je přímý součet $E_p \oplus F_p$ fibrů E a F , jsou-li $\Phi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbf{R}^r$ a $\Psi: \rho^{-1}(V) \rightarrow V \times \mathbf{R}^s$ lokální trivializace E a F v okolí $p \in M$, potom $\Phi \oplus \Psi: (\pi^{-1}(U), \rho^{-1}(V)) / \sim \rightarrow U \cap V \times \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^s$ je lokální trivializace $E \oplus F$.

Tensorový součin vektorových badlů. Buďte $\pi: E \rightarrow M$ a $\rho: F \rightarrow M$ dva vektorové badly nad *stejnou* bází M . Potom fibr jejich tenzorového součinu $\pi \otimes \rho: E \otimes F \rightarrow M$ nad bodem $p \in M$ je tenzorový součin $E_p \otimes F_p$ fibrů E a F , lokální trivializace se definují obdobně jako v předchozích případech. Rovněž symetrizace a antisymetrizace fungují u tenzorových součinů bod po bodu.

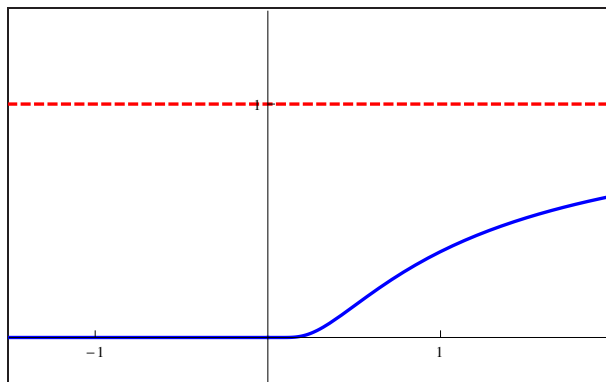
2.6. Lokalizační funkce a rozklad jednotky. Označme $B(q, a) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x - q| \leq a\}$ uzavřenou kouli v \mathbf{R}^n . Formou delšího cvičení v dalším zkonstruujeme hladkou funkci specifických vlastností na \mathbf{R}^n , kterou nazveme *lokalizační funkce*. Tyto vlastnosti jsou

- (i) $\rho(x) = 0$ mimo $x \in B(q, b)$,
- (ii) $\rho(x) = 1$ pro $x \in B(q, a)$, $a < b$.

Příklad 62. Konstrukce lokalizační funkce v \mathbf{R}^n . Funkce

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{pro } x > 0, \\ 0 & \text{pro } x \leq 0. \end{cases}$$

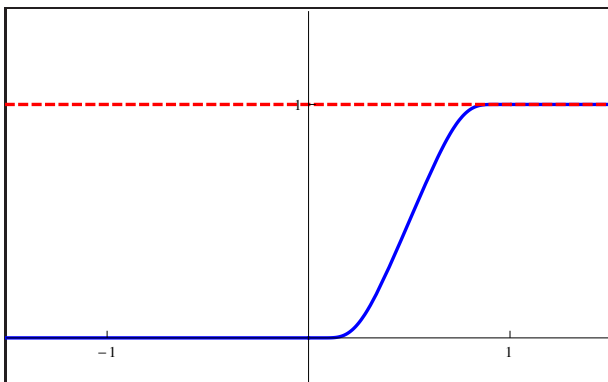
je hladkou funkcí na \mathbf{R} (derivace všech řádů zprava v nule jsou rovny nule).



Zkonstruujme hladkou funkci

$$g(x) = \frac{f(x)}{f(x) + f(1-x)}.$$

Zjevně platí, že $g(x) = 0$ pro $x \leq 0$ a $g(x) = 1$ pro $x \geq 1$ a funkce g je hladká.



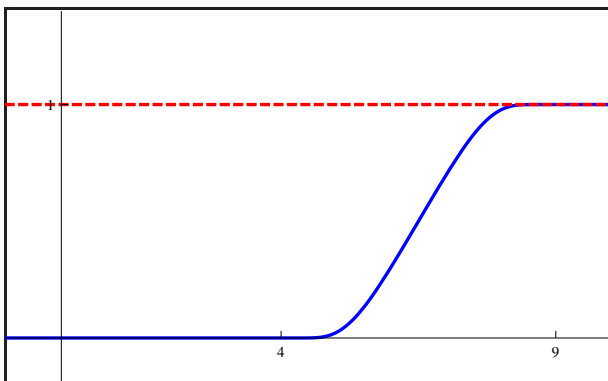
Dále provedeme lineární transformaci tak, aby $[a^2, b^2] \rightarrow [0, 1]$, tj.

$$x \mapsto \frac{x - a^2}{b^2 - a^2}$$

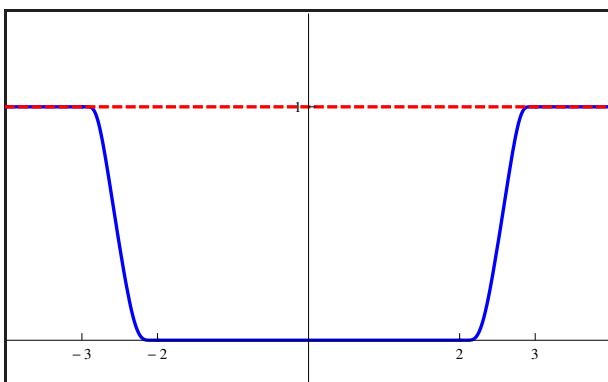
a zaved'eme hladkou funkci

$$h(x) = g\left(\frac{x - a^2}{b^2 - a^2}\right),$$

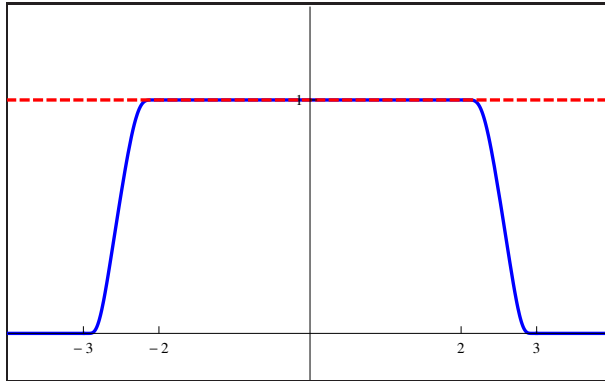
pro kterou zjevně platí $h(x) = 0$ pro $x \leq a^2$ a $g(x) = 1$ pro $x \geq b^2$.



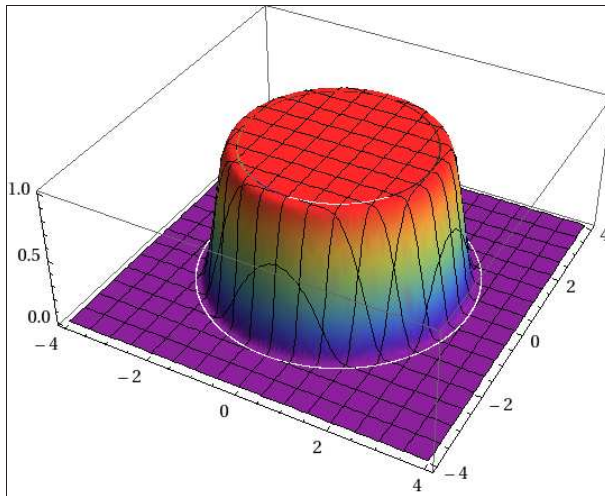
Dále budeme $h(x)$ symetrizovat náhradou argumentu x za x^2 , tedy $k(x) = h(x^2)$.



Nakonec definujme lokalizační funkci $\rho(x) = 1 - k(x)$. Pro $|x| \leq a$ platí $\rho(x) = 1$ a pro $x \geq b$ platí $\rho(x) = 0$.



Takto definovanou $\rho(x)$ lze posunout do libovolného bodu $q \in \mathbf{R}$ posunutím na $\rho(x - q)$. Lokalizační funkci v bodě $q \in \mathbf{R}^n$ potom dostaneme jako $\rho(|x - q|)$, kde $x \in \mathbf{R}^n$ a $|\cdot|$ nyní značí velikost vektoru. Tato funkce má hodnotu 1 na uzavřené kouli se středem q a poloměrem a a hodnotu 0 mimo otevřenou kouli se středem v q a poloměrem b .



Tvrzení 8 (Rozšíření hladké funkce). *Bud' $W \subset M$ otevřená množina, $g \in W$ bod a $f \in C^\infty(W)$ hladká funkce. Potom existuje hladká funkce $\tilde{f} \in C^\infty(M)$, která se s f shoduje na otevřené množině $W \supset V \ni g$.*

Důkaz. Zvolme mapu (U, φ) , $g \in U$ a ρ lokalizační funkci $\eta(p) = \rho(|\varphi(p) - \varphi(g)|)$ tak, aby obraz uzavřené koule $B(\varphi(g), a)$ se středem $\varphi(g)$ a poloměrem a ležel uvnitř W ,

$b > a$ potom zvolme libovolně. Definujme

$$\bar{f}(p) = \begin{cases} \eta(p)f(p) & \text{pro } p \in \varphi^{-1}(B(\varphi(q), b)), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Tato funkce má požadované vlastnosti. □

Definujme napřed *nosič* (hladké) funkce $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ jako $\text{supp } f = \text{uzávěr množiny } \{p \in M \mid f(p) \neq 0\}$. Nyní provedeme rozklad jednotkové funkce pro speciální případ otevřeného pokrytí $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ kompaktní hladké variety M . *Hladký rozklad jednotky* je soubor $(\rho_\alpha)_{\alpha \in A}$ splňujících

(i) $\sum_{\alpha \in A} \rho_\alpha = 1$,

(ii) $\text{supp } \rho_\alpha \subset U_\alpha$.

Věta 9 (Rozklad jednotky na kompaktní varietě). *Nechť M je kompaktní hladká varieta a $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ její otevřené pokrytí. Potom existuje rozklad jednotky $(\rho_\alpha)_{\alpha \in A}$ příslušný tomuto pokrytí.*

Důkaz. Pro každé $q \in M$ nalezneme $U_\alpha \ni q$ a η_q označíme lokalizační funkci s nosičem v U_α . Protože $\eta_q(q) > 0$, existuje okolí V_q bodu q , kde $\eta_q > 0$. Podle předpokládané kompaktnosti má otevřené pokrytí $\{W_q \mid q \in M\}$ konečné podpokrytí $\{V_{q_1}, \dots, V_{q_m}\}$. Buďte $\eta_{q_1}, \dots, \eta_{q_m}$ lokalizační funkce odpovídající tomuto konečnému pokrytí. Potom $\eta = \sum_{i=1}^m \eta_{q_i}$ je zjevně kladná funkce, protože každý bod $q \in M$ náleží do jistého V_{q_i} . Definujme

$$\theta_i = \frac{\eta_{q_i}}{\eta}, \quad i \in \{1, \dots, m\}.$$

Zjevně platí $\sum_{i=1}^m \theta_i = 1$ a také $\text{supp } \theta_i = \text{supp } \eta_{q_i} \subset U_\alpha$. Pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$ buď $\tau(i) \in A$ index, pro který $\text{supp } \theta_i \subset U_{\tau(i)}$. Pro každé $\alpha \in A$ položme

$$\rho_\alpha = \sum_{\tau(i)=\alpha} \theta_i,$$

pokud pro dané α neexistuje i tak, že $\tau(i) = \alpha$, položme $\rho_\alpha = 0$. Potom $(\rho_\alpha)_{\alpha \in A}$ je hledaný rozklad jednotky. □

Předchozí větu lze formulovat i bez předpokladu kompaktnosti hladké variety M , pak ovšem její důkaz vyžaduje již hlubší znalosti topologie a teorie metrických prostorů.

Příklad 63. Buď (U, V) , $U = (-\infty, 1)$, $V = (-1, \infty)$ pokrytí na \mathbf{R} . Zkonstruuje přímo rozklad jednotky příslušný tomuto pokrytí.

2.7. Vektorová pole a operace s nimi. Hladké vektorové pole ξ indukuje lineární zobrazení na algebře $C^\infty(M)$ hladkých funkcí na M definované vztahem

$$(\xi f)(p) = \xi_p f, \quad \forall p \in M.$$

Věta 10 (Charakterizace hladkého vektorového pole). *Hladké zobrazení $\xi: M \rightarrow TM$ je hladké vektorové pole tehdy a jen tehdy, je-li derivací na algebře $C^\infty(M)$ hladkých funkcí na M . Pro $f, g \in C^\infty(M)$ a $a, b \in \mathbf{R}$ tedy platí*

$$(i) \quad \xi(af + bg) = a\xi f + b\xi g, \quad (\text{linearita})$$

$$(ii) \quad \xi(fg) = g\xi f + f\xi g. \quad (\text{Leibnizovo pravidlo})$$

Důkaz. Vezměme mapu (U, φ) na M a k ní příslušnou mapu (TU, Φ) na TM . Potom $\Phi(\xi_p) = (\varphi(p), \xi^1(p), \dots, \xi^n(p))$ a ξ je hladké vektorové pole tehdy a jen tehdy jsou-li hladkými funkcemi jeho koeficienty $\xi^i, i \in \{1, \dots, n\}$.

" \Rightarrow ". Skutečně je pro $f \in C^\infty(M)$

$$(\xi f)|_U = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i},$$

což je hladká funkce (rozšiřitelná na celé M).

" \Leftarrow ". V souřadnicovém systému (U, φ) platí $\xi = \sum \xi^i \partial / \partial x^i$. Podle tvrzení o rozšíření hladké funkce zkonstruujeme funkce \bar{x}^i definované na celém M tak, že $x^i = \bar{x}^i$ na otevřené množině $V \subset U, p \in V$. Na V tedy platí

$$\xi \bar{x}^k = \sum \xi^i \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} = \sum \xi^i \frac{\partial x^k}{\partial x^i} = \xi^k.$$

Tím jsme ukázali, že $\xi^k \in C_p^\infty(M)$. Ale $p \in U$ je libovolný bod a tedy $\xi^k \in C^\infty(U)$. \square

Bud'te ξ, η hladká vektorová pole na M . Jejich *Lieova závorka* je definována jako

$$[\xi, \eta] = \xi\eta - \eta\xi,$$

chápeme-li nyní podle věty 10 vektorové pole jako derivaci v $C^\infty(M)$. Vezmeme-li tedy $f \in C^\infty(M)$, potom

$$[\xi, \eta]f = \xi(\eta f) - \eta(\xi f).$$

Jednoduše ověříme, že pro $f, g \in C^\infty(M)$ a $a, b \in \mathbf{R}$ platí

$$[\xi, \eta](af + bg) = a[\xi, \eta]f + b[\xi, \eta]g \quad \text{a} \quad [\xi, \eta](fg) = g[\xi, \eta]f + f[\xi, \eta]g,$$

z čehož podle věty 10 plyne, že Lieova závorka vektorových polí je opět vektorovým polem.

Věta 11 (Vlastnosti Lieovy závorky). *Bud' te ξ, η, ζ vektorová pole na M a $f, g \in C^\infty(M)$. Potom platí:*

- (1) $[\xi, \eta] = -[\eta, \xi]$,
- (2) $[\xi + \eta, \zeta] = [\xi, \zeta] + [\eta, \zeta]$,
- (3) $[f\xi, g\eta] = f(\xi g)\eta - g(\eta f)\xi + fg[\xi, \eta]$,
- (4) $[\xi, [\eta, \zeta]] + [\eta, [\zeta, \xi]] + [\zeta, [\xi, \eta]] = 0$.

*Poslední rovnost se nazývá **Jacobiho identita**.*

Důkaz. Důkazy proveďte přímým výpočtem jako cvičení. □

Nyní vyjádříme Lieovu závorku lokálně. Bud' (U, φ) mapa na M a $f \in C^\infty(M)$. Potom

$$\xi|_U = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \eta|_U = \sum \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j},$$

a

$$\begin{aligned} [\xi, \eta]_U f &= \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sum_j \eta^j \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) - \sum_j \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sum_i \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) = \\ &= \sum_i \sum_j \xi^i \left(\frac{\partial \eta^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} + \eta^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right) - \eta_j \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^i} + \xi^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right) = \\ &= \sum_i \sum_j \xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} - \eta_j \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^i} = \\ &= \sum_j \left(\sum_i \xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial x^i} - \eta_j \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j} (f). \end{aligned}$$

Vektorová pole v okolí regulárních bodů mají velice jednoduchou strukturu.

Věta 12. *Nechť ξ je vektorové pole na M , $p \in M$ je bod a platí $\xi_p \neq 0$. Potom existuje mapa $(W, \psi = (y^1, \dots, y^n))$ tak, že*

$$\xi|_W = \frac{\partial}{\partial y^1}.$$

Důkaz. V mapě $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ je

$$\psi|_U = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Jelikož $\xi_p \neq 0$, můžeme předpokládat (po případné permutaci souřadnicových funkcí x^i), že $\xi^1 \neq 0$ na okolí $V \ni p$, $V \subset U$. Uvažme systém obyčejných diferenciálních rovnic

$$\frac{dx^i}{dx^1} = \frac{\xi^i(x^1, \dots, x^n)}{\xi^1(x^1, \dots, x^n)}, \quad i \in \{2, \dots, n\}.$$

Podle věty o existenci a jednoznačnosti řešení soustavy obyčejných diferenciálních rovnic existuje $\delta > 0$, $\{(x^1, \dots, x^n) \mid |(x^1, \dots, x^n)| < \delta\} \subset U$ a pro každou počáteční podmínku (z^2, \dots, z^n) , $|z^i| < \delta$, $i \in \{2, \dots, n\}$ má tato soustava jednoznačné řešení

$$x^i = g^i(x^1, z^2, \dots, z^n), \quad i \in \{2, \dots, n\},$$

kde g^i jsou hladké funkce. Uvažme transformaci souřadnic

$$\begin{aligned} x^1 &= z^1, \\ x^i &= g^i(z^1, z^2, \dots, z^n), \quad i \in \{2, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Jacobiho matice této transformace

$$\left. \frac{\partial x}{\partial z} \right|_{z^1=0} = 1.$$

Potom ale

$$\xi|_W = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \xi^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial z^1} \frac{\partial}{\partial x^i} = \xi^1 \frac{\partial}{\partial z^1}.$$

Dále položme

$$y^1 = \int_0^{z^1} \frac{dz^1}{\xi^1}, \quad y^i = z^i, \quad i \in \{2, \dots, n\}.$$

Potom $(W, \psi = (y^1, \dots, y^n))$ je hledaná mapa. □

Příklad 64. Užijte předchozí větu na vektorové pole z příkladu 61.

Příklad 65. Bud' $(U, (x, y))$, kde $U = \{(x, y, z) \in \mathbf{S}^2 \mid z > 0\}$ standardní souřadnicový systém na sféře \mathbf{S}^2 daný kolmou projekcí bodů $z U$ do roviny $z = 0$. Zadejme

$$\xi_U = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$$

Užijte předchozí větu na ξ .

Zobecněním předchozí věty je následující problém. Předpokládejme, že pro každé $p \in M$ je zadán k -rozměrný podprostor $L_p^k \subset T_p M$. Přesněji vyjádřeno musí platit:

pro každý bod $p \in M$ musí existovat jeho okolí U a vektorová pole ξ_1, \dots, ξ_k tak, že v každém bodě $q \in U$ platí $L_q^k = \text{Span}(\xi_{1,q}, \dots, \xi_{k,q})$. Takový systém L^k nazýváme ***k*-rozměrná distribuce** na M a píšeme

$$L^k|_U = \text{Span}(\xi_1, \dots, \xi_k).$$

Vektorová pole (ξ_1, \dots, ξ_k) zjevně nejsou určena jednoznačně, jelikož vektorová pole

$$(\eta_1, \dots, \eta_k) = (\xi_1, \dots, \xi_k)A,$$

kde A je libovolná regulární matice funkcí z $C^\infty(U)$, napínají v každém bodě $q \in U$ stejný podprostor L_q^h .

Zobecnění předchozí věty tedy bude následující. Je zadána k -rozměrná distribuce na M . Za jakých podmínek existuje souřadnicový systém $(W, \psi = (y^1, \dots, y^n))$ tak, že

$$L^h|_W = \text{Span}\left(\frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^k}\right)?$$

Vektorová pole

$$\xi_i = \sum_{j=1}^k A_i^j \frac{\partial}{\partial y^j}, \quad i \in \{1, \dots, k\}$$

tedy napínají stejnou distribuci L^k . Vzhledem k tomu, že $[\partial/\partial y^i, \partial/\partial y^j] = 0$, dostáváme přímým výpočtem

$$[\xi_i, \xi_j] = \sum C_{ij}^k \xi_k, \quad i, j, k \in \{1, \dots, k\},$$

kde

$$C_{ij}^k = \sum_{l,m=1}^k \left(A_i^l \frac{\partial A_j^m}{\partial y^i} - A_i^m \frac{\partial A_j^l}{\partial y^i} \right) (A^{-1})_m^k.$$

Pokud tedy lze distribuci zapsat jako lineární obal souřadnicových vektorových polí, je Lieovu závorka $[L^k, L^k] \subset L^k$. Tuto podmínku nazýváme ***Frobeniova podmínka***.

V dalším ukážeme, že tato nutná podmínka je zároveň podmínkou postačující.

Věta 13 (Frobeniova věta). *Nechť $L^k = \text{Span}(\xi_1, \dots, \xi_k)$ je hladká distribuce na otevřené množině U . Potom nutnou a postačující podmínkou pro existenci souřadnicového systému $(W, \psi = (y^1, \dots, y^n))$ takového, že*

$$L^k|_W = \text{Span}\left(\frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^k}\right).$$

je právě Frobeniova podmínka.

Důkaz. Již jsme ukázali, že se jedná o nutnou podmínku. Nyní ukážeme, že se jedná o podmínku postačující indukci vzhledem k dimenzi k distribuce L^k . Pro $k = 1$ jsme větu již dokázali (viz věta 12). Předpokládejme, že věta platí pro $\ell \in \{1, \dots, k-1\}$. Předpokládejme, že distribuce L^k je generována lineárně nezávislým systémem vektorových polí ξ_1, \dots, ξ_k na U , přičemž

$$[\xi_i, \xi_j] = 0 \pmod{\xi_m}, \quad 0 \leq i, j, m \leq k.$$

Podle věty 12 existuje souřadnicový systém (y^1, \dots, y^n) tak, že $\xi_k = \partial/\partial y^k$ (po transpozici $1 \leftrightarrow k$). Označme

$$\xi'_\ell = \xi_\ell - (\xi_\ell y^k) \xi_k, \quad 1 \leq \ell \leq k-1.$$

Zjevně platí

$$\xi'_\ell y^k = 0, \quad \xi_k y^k = 1.$$

Jelikož $L^k = \langle \xi'_1, \dots, \xi'_{k-1}, \xi_k \rangle$, splňují tato vektorová pole Frobeniovu podmínku.

$$[\xi'_i, \xi'_j] = a_{ij} \xi_k \pmod{\xi'_m}, \quad 1 \leq i, j, m \leq k-1$$

a pokud aplikujeme pravou i levou stranu na souřadnicovou funkci y^k , dostáváme $a_{ij} = 0$. Proto distribuce $L^{k-1} = \langle \xi'_1, \dots, \xi'_{k-1} \rangle$ splňuje Frobeniovu podmínku a vzhledem k indukčnímu předpokladu existuje souřadnicový systém (z^1, \dots, z^n) v bodě p tak, že

$$L^{k-1} = \left\langle \frac{\partial}{\partial z^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z^{k-1}} \right\rangle$$

a navíc $\partial y^k / \partial z^\ell = 0$. Protože

$$L^k = \left\langle \frac{\partial}{\partial z^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z^{k-1}}, \xi_k \right\rangle,$$

Frobeniova podmínka dává

$$\left[\frac{\partial}{\partial z^\ell}, \xi_k \right] = b_\ell \xi_k \pmod{\frac{\partial}{\partial z^m}}, \quad 1 \leq \ell, m \leq k-1$$

a po aplikaci pravé i levé strany na y^k dostáváme $b_\ell = 0$ a tedy

$$\left[\frac{\partial}{\partial z^\ell}, \xi_k \right] = \sum_{m=1}^{k-1} c_\ell^m \frac{\partial}{\partial z^m}.$$

Vyjádříme ξ_k v souřadnicích (z^1, \dots, z^n) , tedy

$$\xi_k = \sum_{j=1}^n \xi^j \frac{\partial}{\partial z^j}$$

a z toho

$$\left[\frac{\partial}{\partial z^\ell}, \xi_k \right] = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \xi^j}{\partial z^\ell} \frac{\partial}{\partial z^j}.$$

Porovnáním obou vyjádření získáme

$$\frac{\partial \xi^j}{\partial z^\ell}, \quad 1 \leq \ell \leq k, \quad k \leq j \leq n.$$

Z toho plyne, že ξ^j závisí pouze na z^k, \dots, z^n . Položme

$$\xi'_k = \sum_{j=k}^n \xi^j \frac{\partial}{\partial z^j}.$$

Potom stále platí

$$L^k = \left\langle \frac{\partial}{\partial z^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z^{k-1}}, \xi'_k \right\rangle$$

a podle věty 12 existuje transformace souřadnic od (z^k, \dots, z^n) ke (w^k, \dots, w^n) tak, že $\xi'_k = \partial / \partial w^k$. Tato transformace neobsahuje souřadnice z^1, \dots, z^{k-1} . Položme $w^i = z^i$ pro $i \in \{1, \dots, k-1\}$. Potom (w^1, \dots, w^n) je souřadný systém v okolí p a platí

$$L^k = \left\langle \frac{\partial}{\partial w^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial w^k} \right\rangle.$$

□

V praktických výpočtech se distribuce obvykle zadávají na duálním prostoru.

Příklad 66. (Disk valící se po rovině bez prokluzování) Bod konfiguračního prostoru disku o poloměru r je (x, y, θ, φ) , kde (x, y) jsou souřadnice bodu dotyku, θ je úhel, který svírá projekce disku do roviny xy s osou x , φ určuje otočení disku vzhledem k ose procházející bodem dotyku a kolmé k rovině xy . Potom platí

$$dx - r \cos \theta d\varphi = 0, \quad dy - r \sin \theta d\varphi = 0.$$

Tomu odpovídá distribuce

$$L^2 = \left\langle r \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial \theta} \right\rangle$$

Zjistěte, zda tato distribuce splňuje Frobeniovu podmínku.

Příklad 67. (Kinematický model automobilu v rovině) Automobil má známý rozvor kol ℓ , jeho souřadnice jsou poloha (x, y) středu zadní nápravy, otočení θ podélné osy automobilu vzhledem k ose x a otočení φ předních kol vzhledem k podélné ose. Automobil se po rovině nesmýká. Najděte distribuci, ve které se mohou nacházet rychlosti. Ze skutečnosti, že nemůže docházet ke smyku, vyplývá

$$\sin \theta dx - \cos \theta dy = 0, \quad \sin(\theta + \varphi) dx - \cos(\theta + \varphi) dy - \ell \cos \varphi d\theta = 0.$$

Zjistěte opět, zda tato distribuce splňuje Frobeniovu podmínku.

3. Diferenciální formy a integrace

Diferenciální formy jsou na varietách základním nástrojem, poskytují přístup nezávislý na lokálních souřadnicových systémech. Mají přemnohé aplikace v geometrii, topologii a fyzice.

3.1. Lineární diferenciální formy. Bud' M hladká varieta a $p \in M$ její bod. *Kotečný prostor* $k M$ v bodě p , označovaný T_p^*M je duální prostor k tečnému prostoru T_pM . Prvku prostoru $\omega \in T_p^*M$ říkáme *kovektor* a je to tedy lineární forma

$$\omega: T_pM \rightarrow \mathbf{R}$$

Analogickým způsobem jako pro tečný prostor můžeme zavést strukturu hladké variety na kotečném prostoru, atlas zde bude dán souřadnicovými systémy $(T^*U, (x^i, \text{Ev}(\partial/\partial x^i)))$ indukovanými ze systému $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$. Zde $\text{Ev}(\partial/\partial x^i)$ značí vyčíslení lineární formy na souřadnicovém tečném vektoru. Kotečný prostor T^*M je tedy dalším příkladem vektorového bandlu nad M .

Velká užitečnost diferenciálních forem tkví v možnosti jejich pullbacku libovolným hladkým zobrazením.

Diferenciál hladké funkce $f \in C^\infty(M)$ je lineární diferenciální forma df taková, že pro všechna $p \in M$ a $\xi_p \in T_pM$ platí

$$(df)_p \xi_p = \xi_p f.$$

Lokální vyjádření diferenciálu v souřadnicovém systému $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ je stejné jako vyjádření diferenciálu $f \circ \varphi^{-1}$, tj.

$$df|_U = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i,$$

kde stejně jako v euklidovském případě (dx^i) značí duální bázi k $(\partial/\partial x^i)$.

Lineární diferenciální formy jsou tedy hladkými řezy kotečného bandlu, tj. jsou to hladká zobrazení $\omega: M \rightarrow T^*M$ splňující $\pi \circ \omega = \text{id}_M$.

Obdobně jako pro hladká vektorová pole máme následující charakterizaci hladkých lineárních diferenciálních forem.

Tvrzení 14. *Lineární diferenciální forma ω na M je hladká, tehdy a jen tehdy, je-li splněna některá z následujících podmínek*

(a) pro každý bod $p \in M$ existuje mapa $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$, $p \in U$ tak, že pokud

$$\omega|_U = \sum_{i=1}^n \omega_i dx^i,$$

potom $\omega_i \in C^\infty(U)$,

(b) pro každou mapu $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ platí, že je-li

$$\omega|_U = \sum_{i=1}^n \omega_i dx^i.$$

potom $\omega_i \in C^\infty(U)$,

Důkaz. Mapa (U, φ) na M indukuje mapu (T^*U, Φ^*) na T^*M takto:

$$\begin{aligned} \Phi^* : T^*U &\rightarrow \varphi(U) \times \mathbf{R}^n \\ (q, \sum c_i (dx^i)_q) &\mapsto (\varphi(q), c_1, \dots, c_n). \end{aligned}$$

Vzhledem k této mapě

$$(\Phi^* \circ \omega)_q = (\varphi(q), c_1(\omega_q), \dots, c_n(\omega_q)).$$

Je-li $\omega = \sum \omega_i dx^i$, potom $\omega^i(q) = c_i(\omega_q)$. Zde c_i jsou funkce na T^*U , zatímco ω_i jsou funkce na U . \square

Hladké lineární formy lze rovněž charakterizovat přímo pomocí hladkých vektorových polí.

Tvrzení 15. *Lineární diferenciální forma ω na M je hladká tehdy a jen tehdy, jestliže pro každé hladké vektorové pole ξ na M je $\omega(\xi)$ hladká funkce na M .*

Důkaz. " \Rightarrow ". Zvolíme mapu $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ v okolí bodu $p \in M$. Potom

$$\omega|_U = \sum \omega_i dx^i, \quad \xi|_U = \sum \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

a

$$\omega(\xi)|_U = \sum_i \omega_i dx^i \left(\sum_j \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \sum_i \sum_j \omega_i \xi^j \delta_j^i = \sum_i \omega_i \xi^i,$$

což je hladká funkce.

" \Leftarrow ". Necht' jsou splněny předpoklady a zapišme v souřadnicích $\omega|_U = \sum \omega_i dx^i$. Pomocí lokalizační funkce $\sigma : M \rightarrow \mathbf{R}$ kolem $p \in M$, která je jednotková na V získáme

$$\xi_{i,q} = \begin{cases} \sigma(q) \frac{\partial}{\partial x^i}, & \text{pro } q \in U \\ 0, & \text{pro } q \notin U. \end{cases}$$

Potom ξ_i jsou hladká vektorová pole na M a $\omega(\xi_i)$ jsou hladké funkce podle předpokladu. Na otevřené množině V potom platí

$$\omega(\xi_i)|_V = \sum_j \omega_j dx^j \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \omega_i.$$

□

Pullback $F^* \omega$ lineární diferenciální formy ω na hladké varietě N hladkým zobrazením $F: M \rightarrow N$ definujeme vztahem

$$(F^* \omega)_p(\xi_p) = \omega_{F(p)}(F_{*,p} \xi_p),$$

pro všechna $p \in M$ a $\xi_p \in T_p M$.

Příklad 68. Dokažte $C^\infty(M)$ -linearitu lineárních diferenciálních forem, tj. $\omega(f\xi + \eta) = f\omega(\xi) + \omega(\eta)$ pro $f \in C^\infty(M)$, hladkou lineární diferenciální formu ω na M a hladká vektorová pole ξ, η na M .

Příklad 69. Lineární forma na $M = \mathbf{R}^2 \setminus (0, 0)$. Buďte

$$\xi = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}, \eta = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y},$$

hladká vektorová pole na M . Nalezněte lineární formu ω na M tak, aby $\omega(\xi) = 1$ a $\omega(\eta) = 0$.

Příklad 70. Zaveďte strukturu vektorového badlu na k -té vnější mocnině kotečného bandlu $\Lambda^k T^* M$.

Příklad 71. Uvažte zobrazení $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^4$ a $g: \mathbf{S}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ z příkladu 28, 2-formu $\alpha = dy^1 \wedge dy^2 + dy^3 \wedge dy^4$ na \mathbf{R}^4 a 1-formu $\beta = x^1 dx^2 + x^2 dx^1$ na \mathbf{R}^3 . Spočítejte $f^* \alpha$ a $g^* \beta$.

Hladké řezy vektorového bandlu $\Lambda^k T^* M$ nazýváme **hladké diferenciální k -formy** na hladké varietě M . Pro $k = 0$ položíme $\Lambda^0 T^* M = M \times \mathbf{R}$, řezy tohoto, tzv. **skalárního bandlu** jsou hladké funkce na M .

Množinu hladkých diferenciálních k -forem značíme $\Omega^k(M)$, dále zavádíme značení $\Omega_c^k(M)$ pro hladké diferenciální k -formy s kompaktním nosičem. Množiny $\Omega(M) = \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k(M)$, resp. $\Omega_c(M) = \bigoplus_{k=0}^n \Omega_c^k(M)$ jsou gradované algebry vzhledem k bodovému vnějšímu násobení nad okruhem $C^\infty(M)$ hladkých funkcí na M , resp. okruhem $C_c^\infty(M)$ hladkých funkcí s kompaktním nosičem.

Buď $F: M \rightarrow N$ hladké zobrazení a $\alpha \in \Omega^k(N)$. Potom **pullback** $F^* \alpha$ definujeme bo-

dově

$$F^* \alpha(\xi_1, \dots, \xi_k) = \alpha(F_* \xi_1, \dots, F_* \xi_k),$$

tedy mj. platí, že $F^*(\alpha \wedge \beta) = F^*(\alpha) \wedge F^*(\beta)$.

3.2. Vnější derivace. Diferenciální k -formy hrají v diferenciálním počtu na varietách stěžejní roli kvůli existenci vnější derivace $d: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$.

Věta 16 (Existence a jednoznačnost vnější derivace). *Bud' M hladká varieta. Potom existuje právě jedno zobrazení $d: \Omega(M) \rightarrow \Omega(M)$ takové, že*

(1) pro všechny $\alpha, \beta \in \Omega(M)$ platí $d(\alpha + \beta) = d\alpha + d\beta$,

(2) bud' $\alpha \in \Omega^k(M)$, potom d je *gradovaná derivace*, tj.

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta,$$

(3) je-li $f \in \Omega^0(M)$ hladká funkce, potom $d f$ je diferenciál f ,

(4) pro $f \in \Omega^0(M)$ je $d(df) = 0$.

Důkaz. Napřed ukážeme, že vnější derivace d existuje a že je to lokální operace. Lokálnost znamená toto: necht' $\alpha, \beta \in \Omega^k(M)$, přičemž restrikce $\alpha|_U = \beta|_U$ na otevřené množině $U \subset M$. Potom $d\alpha|_U = d\beta|_U$. S využitím podmínky (1) a (2)

$$d(1) = d(1 \cdot 1) = d(1) \cdot 1 + 1 \cdot d(1) = 2d(1), \quad d(1) = 0$$

$$d(1) = d((-1) \cdot (-1)) = d(-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot d(-1), \quad d(-1) = 0.$$

stačí dokázat $(\alpha - \beta)|_U = 0 \Rightarrow d(\alpha - \beta)|_U = 0$. Označme $\omega = \alpha - \beta$. Zvolme bod $p \in M$ libovolně. Existuje lokalizační funkce ρ spolu s otevřenou množinou $W \subset U$, $p \in W$, tak, že

$$\rho(q) = \begin{cases} 1 & q \in W, \\ 0 & q \notin U. \end{cases}$$

Tedy $\rho\omega \in \Omega^k(M)$ a $\rho\omega = 0$ identicky. Proto platí z (2) $d(\rho\omega) = d\rho \wedge \omega + \rho d\omega$ a odtud $d\omega|_W = 0$. Vzhledem k libovolnosti $p \in U$ musí být $\omega|_U = 0$.

Necht' $\omega \in \Omega^k(U)$. Vzhledem k existenci lokalizační funkce pro libovolný $p \in U$ existuje $\bar{\omega} \in \Omega^k(M)$ tak, že

$$\bar{\omega}|_W = \omega|_W$$

a proto můžeme definovat $d\omega|_W = d\bar{\omega}|_W$.

Nyní dokážeme jednoznačnost d v souřadnicovém okolí $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$. Kvůli (1) a případnou permutací souřadnicových funkcí stačí uvažovat monom

$$\omega = a dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k,$$

kde $a \in C^\infty(M)$. Operace d aplikovaná na $\omega \in \Omega^k(U)$ musí splňovat podmínky (1)–(4). Proto

$$d\omega = da \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k$$

$d\omega|_U$ je tedy určena jednoznačně a zřejmě splňuje (1) a (3). Ukážeme, že splňuje (2). Uvažme dva monomy $\alpha = a dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ a $\beta = b dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_\ell}$. Potom dostáváme

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= (bda + adb) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_\ell} = \\ &= dadx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge bdx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_\ell} + \\ &+ (-1)^k adx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dbdx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_\ell} = \\ &= d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta. \end{aligned}$$

Nakonec ověříme (4). Bud' $f \in C^\infty(M)$. Potom na U platí

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

a tedy

$$d(df) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^j \wedge dx^i = 0$$

kvůli záměnnosti druhých parciálních derivací hladké funkce.

Bud' nyní V jiné souřadnicové okolí. Kvůli lokálnosti vnější derivace a jednoznačnosti v souřadnicovém okolí platí

$$(d\omega|_U)|_{U \cap V} = d\omega|_{U \cap V} = (d\omega|_V)|_{U \cap V}.$$

d je tedy na $U \cap V$ a tím je dokázána existence. □

Z předchozí věty bezprostředně vyplývá následující:

Věta 17 (Poincarého lemma). $d^2 = 0$, tj. pro každou k -formu $\alpha \in \Omega^k(M)$ platí $d(d\alpha) = 0$.

Důkaz. Vzhledem k linearitě d stačí větu dokázat pro monom

$$\alpha = a dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k.$$

Máme

$$\begin{aligned} d(d\alpha) &= d(da dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k) = \\ &= d(da) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k - da \wedge d dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^k + \\ &\quad + \dots = 0. \end{aligned}$$

□

Příklad 72. Bud' te (x, y, z) standardní souřadnice v \mathbf{R}^3 . Spočtete vnější derivaci k -formy na \mathbf{R}^3 v těchto souřadnicích pro $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Lemma 18. Bud' $\omega \in \Omega^1(M)$ a ξ, η vektorová pole na M . Potom

$$(d\omega)(\xi, \eta) = \xi(\omega(\eta)) - \eta(\omega(\xi)) - \omega([\xi, \eta]).$$

Příklad 73. Předchozí lemma dokažte přímým výpočtem pravé a levé strany.

Příklad 74. Dokažte obdobnou rovnost pro $\omega \in \Omega^k(M)$ a vektorová pole ξ_1, \dots, ξ_{k+1} na M :

$$\begin{aligned} (d\omega)(\xi_1, \dots, \xi_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} \omega(\xi_1, \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \xi_{k+1}) + \\ &\quad + \sum_{1 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j} \omega([\xi_i, \xi_j], \xi_1, \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \hat{\xi}_j, \dots, \xi_{k+1}), \end{aligned}$$

kde $\hat{}$ znamená vynechání v posloupnosti.

Užitím lemmatu 18 můžeme reformulovat Frobeniovu podmínku duálně pomocí tzv. anihilátoru distribuce L^k . **Anihilátor** $(L^k)^\circ$ distribuce L^k je definován

$$(L^k)^\circ = \{\omega \in \Omega^1(M) \mid \omega(\xi) = 0 \text{ pro všechna } \xi \in L^k\}.$$

V okolí každého bodu $p \in M$ existuje lineárně nezávislý systém 1-forem $(\omega_{k+1}, \dots, \omega_n)$, jehož $C^\infty(M)$ -lineárním obalem je anihilátor $(L^k)^\circ$. To vidíme např. následovně. Systém (ξ_1, \dots, ξ_k) , který v okolí bodu p generuje L^k , doplníme na bázi $(\xi_1, \dots, \xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n)$. Duální báze je potom $(\omega_1, \dots, \omega_k, \omega_{k+1}, \dots, \omega_n)$.

Lokálně tedy distribuci L^k zadáme jako soustavu rovnic

$$\omega_i = 0, \quad k+1 \leq i \leq n,$$

která se nazývá *Pfaffova* soustava rovnic. S využitím lemmatu 18 máme

$$(d\omega_i)(\xi_\ell, \xi_m) = \xi_\ell(\omega_i(\xi_m)) - \xi_m(\omega_i(\xi_\ell)) - \omega_i([\xi_\ell, \xi_m]) = -\omega_i([\xi_\ell, \xi_m]),$$

pro $k+1 \leq i \leq n$, $1 \leq \ell, m \leq k$. Distribuce L^k tedy splňuje Frobeniovu podmínku tehdy a jen tehdy, je-li

$$d\omega_i(\xi_\ell, \xi_m) = 0.$$

Ukážeme, že toto je ekvivalentní podmínce

$$d\omega_i = 0 \pmod{\langle \omega_{k+1}, \dots, \omega_n \rangle}, \quad k+1 \leq i \leq n.$$

Vyjádříme $d\omega_i$ v bázi $(\omega_1, \dots, \omega_n)$. Dostáváme

$$d\omega_i = \sum_{j=k+1}^n a_i^j \omega_j + \sum_{\ell, m=1}^k b_i^{\ell m} \omega_\ell \wedge \omega_m,$$

kde a_i^j jsou 1-formy a $b_i^{\ell m}$ funkce na M . Vzhledem k tomu, že $\omega_i(\xi_j) = \delta_{ij}$, dostáváme $b_i^{\ell m} = 0$.

Pokud existuje mapa (U, x^i) tak, že podvariety $x^j = 0$, $k+1 \leq j \leq n$ splňují soustavu rovnic $\omega_i = 0$, $k+1 \leq j \leq n$, pak řekneme, že tato Pfaffova soustava rovnic je úplně integrabilní. V této situaci je tečný prostor k podvarietě určen uvažovanou distribucí. Frobeniova věta tedy zodpovídá otázku, kdy daná distribuce určená svým anihilátorem je ve skutečnosti tečným prostorem k nějaké podvarietě N variety M .

Věta 19 (Frobeniova věta). *Nutnou a postačující podmínkou pro úplnou integrovatelnost Pfaffovy soustavy rovnic*

$$\omega_i = 0, \quad k+1 \leq i \leq n$$

je

$$d\omega_i = 0 \pmod{\langle \omega_{k+1}, \dots, \omega_n \rangle}, \quad k+1 \leq i \leq n.$$

Příklad 75. ★ Uvažte Pfaffovu rovnici $\Omega = P dx + Q dy + R dz$ v \mathbf{R}^3 . Ukažte, že rovnice je úplně integrabilní tehdy a jen tehdy, platí-li $d\Omega \wedge \Omega = 0$.

Nyní ukážeme, že vnější derivace a pullback komutují.

Věta 20. *Bud' $F: M \rightarrow N$ hladké zobrazení a $\omega \in \Omega^k(N)$ hladká diferenciální k -forma. Potom indukované zobrazení $F^*: \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$ komutuje s vnější derivací, tj.*

$$F^* d\omega = dF^* \omega.$$

Jinak řečeno komutuje diagram

$$\begin{array}{ccc} \Omega(N) & \xrightarrow{d} & \Omega(N) \\ F^* \downarrow & & \downarrow F^* \\ \Omega(M) & \xrightarrow{d} & \Omega(M) \end{array}$$

Důkaz. Obě operace jsou lineární, důkaz tedy stačí provést pro monom. Uvažme nařed $f \in \Omega^0(N)$ a zvolme hladké vektorové pole ξ na M libovolně. Potom

$$F^*(df)(\xi) = (df)(F_*\xi) = \xi(F_*f) = \xi(f \circ F) = d(F^*f)(\xi).$$

Tvrzení tedy platí pro 0-formy. Dále vezměme $\alpha = f dg$, kde $f, g \in C^\infty(N)$. Potom

$$F^*(d\alpha) = F^*(df \wedge dg) = F^*df \wedge F^*dg = dF^*f \wedge dF^*g = d(F^*\alpha)$$

a tvrzení tedy platí pro 1-formy. Dále pokračujeme indukcí vzhledem k řádu k diferenciální formy ω . Uvažme monom $\omega = \alpha \wedge \beta$, kde $\alpha \in \Omega^1(N)$ a $\beta \in \Omega^{k-1}(N)$. Potom s využitím indukční hypotézy platí

$$\begin{aligned} dF^*(\omega) &= d(F^*\alpha \wedge F^*\beta) = dF^*\alpha \wedge F^*\beta - F^*\alpha \wedge dF^*\beta = \\ &= F^*d\alpha \wedge F^*\beta - F^*\alpha \wedge F^*d\beta = F^*(d\alpha \wedge \beta - \alpha \wedge d\beta) = F^*d\omega \end{aligned}$$

□

Příklad 76. Spočítejte $f^* d\alpha$, $d f^* \alpha$, $g^* d\beta$, $d g^* \beta$ z příkladu 71.

3.3. Integrace. Nejjednodušším způsobem jak propojit lokální a globální vlastnosti variety je integrace diferenciálních forem. K definici integrace potřebujeme nařed definovat jisté základní pojmy.

Hladkou nenulovou diferenciální n -formu ω na hladké varietě M , $\dim M = n$ nazveme *objemový element* na M . Hladkou varietu, na níž existuje objemový element, nazývá-

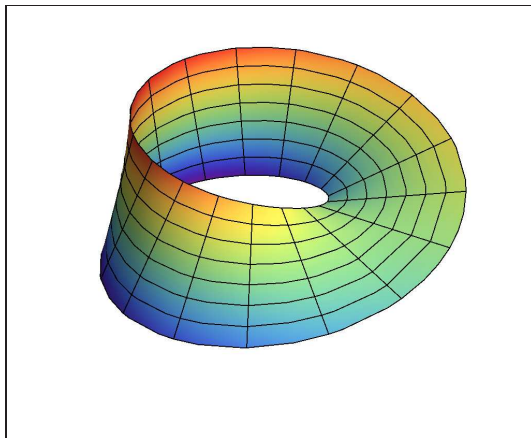
váme *orientovatelnou*, pokud je ω zadáno, zadává na M *orientaci*. Pokud je zadán jiný objemový element $\omega' = f\omega$, kde $f > 0$ je hladká funkce na M , určuje stejnou orientaci. Pro (souvislou) orientovatelnou varietu tedy existují právě dvě orientace.

Zvolme souřadný systém $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ na M . Potom se $\omega|_U$ a $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ liší o nenulový faktor. Pokud je tento faktor kladný, řekneme, že souřadný systém (U, φ) je *konzistentní* s orientací ω na M . Je zřejmé, že pro každou orientovanou varietu M existuje atlas tvořený konzistentními mapami (případně se prostě provede jedna transpozice souřadnicových funkcí), jacobíán transformace souřadnic tedy vždy bude kladný.

Příklad 77. Dokažte opačné tvrzení k předchozímu. Je zadán atlas na M takový, že jacobíány všech transformací souřadnic jsou kladné. Využijte existenci rozkladu jednotky ke konstrukci nenulové hladké diferenciální n -formy na M .

Příklad 78. Möbiova páska je příkladem hladké variety, jež není orientovatelná. Uvedeme její realizaci vloženou podvarietou v \mathbf{R}^3 , $\iota: \mathbf{S}^1 \times (-1, 1) \rightarrow \mathbf{R}^3$, $(u, v) \mapsto \iota(u, v)$

$$\begin{aligned} x &= \left(1 + \frac{1}{2}v \cos \frac{u}{2}\right) \cos u \\ y &= \left(1 + \frac{1}{2}v \cos \frac{u}{2}\right) \sin u \\ z &= \frac{1}{2}v \sin \frac{u}{2}. \end{aligned}$$



Nyní s využitím existence rozkladu jednotky na orientované varietě M můžeme definovat integrál hladké diferenciální formy $\eta \in \Omega_c^n(M)$ s kompaktním nosičem. Integrál $\int_M \eta$ je roven $\int_U \eta$, kde U je otevřená množina taková, že \bar{U} je nosič η . Potom zjevně $\int_M \eta = \int_U \eta = \int_{\bar{U}} \eta$. Mějme rozklad jednotky (ρ_α) příslušný atlasu $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$. Po-

tom zjevně platí

$$\eta = \left(\sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \right) \eta = \sum_{\alpha} (\rho_{\alpha} \eta).$$

Ale forma $\text{supp } \rho_{\alpha} \eta \subset U_{\alpha}$ a můžeme definovat

$$\int_M \rho_{\alpha} \eta := \int_{U_{\alpha}} \rho_{\alpha} \eta,$$

kde integrál na pravé straně je Riemannův integrál na \mathbf{R}^n , tj.

$$\rho_{\alpha} \eta|_U = f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

a

$$\int_{U_{\alpha}} \rho_{\alpha} \eta = \int_{\varphi_{\alpha}(U_{\alpha})} f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Musíme ukázat, že pravá strana je dobře definovaná. Vezměme tedy dva libovolné souřadné systémy $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ a $(V, \psi = (y^1, \dots, y^n))$. Jacobián transformace

$$J = \frac{\partial(y^1, \dots, y^n)}{\partial(x^1, \dots, x^n)} > 0$$

podle předpokladu. Vyjádříme $\rho_{\alpha} \eta$ v obou souřadnicových systémech, tj.

$$\rho_{\alpha} \eta = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \bar{f} dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n,$$

kde $f = \bar{f} J = \bar{f} |J|$ a $\text{supp } f = \text{supp } \bar{f} \subset U \cap V$. Proto z věty o transformaci souřadnic v Riemannově integrálu dostáváme

$$\begin{aligned} \int_{U \cap V} \bar{f} dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n &= \int_{U \cap V} \bar{f} J dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \\ &= \int_{U \cap V} \bar{f} |J| dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \int_{U \cap V} f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n, \end{aligned}$$

tj. skutečně platí

$$\int_U \rho_{\alpha} \eta = \int_V \rho_{\alpha} \eta.$$

Položme nyní

$$\int_M \eta = \int_{\bar{U}} \eta = \sum \int_{U_{\alpha}} \rho_{\alpha} \eta.$$

Pravá strana je pro daný rozklad jednotky dobře definovaná. Na závěr ještě musíme ukázat, že integrál nezávisí na volbě rozkladu jednotky. Předpokládejme, že (τ_{β}) je jiný rozklad jednotky příslušný danému atlasu. Potom

$$\sum_{\beta} \int_M \tau_{\beta} \eta = \sum_{\beta} \sum_{\alpha} \int_M \rho_{\alpha} \tau_{\beta} \eta = \sum_{\alpha} \int_M \rho_{\alpha} \sum_{\beta} \tau_{\beta} \eta = \sum_{\alpha} \int_M \rho_{\alpha} \eta.$$

Příklad 79. Dokažte, že integrál $\eta \mapsto \int_M \eta$ je lineární funkcionál na \mathbf{R} -vektorovém prostoru hladkých n -forem na M s kompaktním nosičem.

Dále můžeme definovat integrál diferenciální k -formy η na k -rozměrné podvarietě $\iota: N \rightarrow M$ variety M vztahem

$$\int_{\iota(N)} \eta = \int_N \iota^* \eta.$$

Příklad 80. Uvažujte sféru \mathbf{S}^2 o poloměru r jako vloženou podvarietu v \mathbf{R}^3 . Spočtete integrál z diferenciální formy

$$\eta = \frac{x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

přes $\iota(\mathbf{S}^2)$.

3.4. Stokesova věta. Napřed je třeba definovat, co rozumíme integrační oblastí a co přesně považujeme za její hranici. Definujme horní poloprostor $\mathbf{R}_+^n = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbf{R}^n \mid x^n \geq 0\}$. Uvažujme nyní souřadnicové systémy (U, φ) takové, že $\varphi(U)$ je otevřená podmnožina v \mathbf{R}_+^n , přičemž vše ostatní, tj. atlas, hladká struktura, hladká varieta se zkonstruuje analogicky s touto modifikací. Takto získáme *varietu s okrajem*. *Vnitřek* $\text{Int } M$ variety s okrajem je množina bodů, v jejichž okolí existuje souřadný systém (U, φ) , kde $\varphi(U)$ je otevřená množina v \mathbf{R}^n . *Okraj* $\partial M = M \setminus \text{Int } M$ hladké variety s okrajem je hladkou varietou (bez okraje).

Příklad 81. Ukažte, že uzavřená jednotková koule $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ je hladkou varietou s okrajem. Co je jejím okrajem?

Příklad 82. Dokažte, že ∂M je hladkou varietou.

Na horním poloprostoru budeme uvažovat standardní orientaci $\omega dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$. *Indukovanou orientaci* na hranici $\partial \mathbf{R}_+^n = \{x^n = 0\}$ definujeme jako $\omega_n = (-1)^n dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}$. Pro obecnou orientovanou varietu M s okrajem ∂M buď (U, φ) konzistentní souřadnicová mapa a položme $\partial U = \partial M \cap U$. Potom *indukovaná orientace* na ∂U je dána jako $\varphi^* \omega_n$ a indukovanou orientaci na ∂M získáme standardně pomocí rozkladu jednotky. Nyní máme vše připraveno k formulaci důležité věty.

Věta 21 (Stokesova věta). *Buď η hladká diferenciální $(n-1)$ -forma na orientované varietě M s okrajem ∂M , $\dim M = n$, přičemž okraj ∂M je opatřen indukovanou orientací. Potom*

$$\int_M d\eta = \int_{\partial M} \eta.$$

Důkaz. Napřed větu dokážeme pro dva speciální případy odpovídající vnitřním a okrajovým bodům.

Speciální případ 1 (\mathbf{R}^n). Kvůli linearitě integrandu stačí uvažovat $\eta = f(-1)^{n-1} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}$. Potom $d\eta = \partial f / \partial x^n dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}$ a s využitím Fubiniovy věty

$$\int_{\mathbf{R}^n} d\eta = \int dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1} (-1)^{n-1} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n \right).$$

Ale f je funkce s kompaktním nosičem a proto $f(x^1, \dots, x^{n-1}, \infty) - f(x^1, \dots, x^{n-1}, -\infty) = 0$. $\partial \mathbf{R}^n = \emptyset$ a integrál na pravé straně je také roven 0.

Speciální případ 2 (\mathbf{R}_+^n). Uvažme

$$\eta = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} f_i dx^1 \wedge \dots \wedge \hat{x}^i \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Potom

$$d\eta = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x^i}.$$

Povšimněme si, že pro $i \in \{1, \dots, n-1\}$ platí

$$\int_{\mathbf{R}_+^n} \frac{\partial f_i}{\partial x^i} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \int_0^\infty \left(\int_{\mathbf{R}^{n-1}} \frac{\partial f_i}{\partial x^i} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1} \right) dx^n,$$

výraz v závorce je roven nule podle speciálního případu 1 ($n-1 \leftrightarrow n$). Zbývá tedy

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}_+^n} d\eta &= \int_{\mathbf{R}_+^n} \frac{\partial f_n}{\partial x^n} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \int dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1} (-1)^{n-1} \int_0^\infty \frac{\partial f_n}{\partial x^n} dx^n = \\ &= \int_{\mathbf{R}^{n-1}} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1} (-1)^{n-1} (f_n(x^1, \dots, x^{n-1}, \infty) - f_n(x^1, \dots, x^{n-1}, 0)) = \\ &= \int_{\mathbf{R}^{n-1}} f_n(x^1, \dots, x^{n-1}, 0) (-1)^n dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1} = \int_{\partial \mathbf{R}_+^n} \eta. \end{aligned}$$

Obecný případ dokážeme pomocí rozkladu jednotky. Bud' $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ atlas tvořený mapami konzistentními s orientací M a ρ_α odpovídající rozklad jednotky. Můžeme tedy psát $\eta = \sum_\alpha \rho_\alpha \eta$. Vzhledem k tomu, že Stokesova věta je lineární v η , stačí ji dokázat pro formu $\rho_\alpha \eta$, jejíž nosič je podmnožinou souřadnicového okolí U_α . Forma $\rho_\alpha \eta$ má rovněž kompaktní nosič, protože $\text{supp } \rho_\alpha \eta = \text{supp } \rho_\alpha \cap \text{supp } \eta$ je uzavřená podmnožina kompaktní množiny a tedy kompaktní.

Víme, že souřadnicové okolí okolí U_α je difeomorfní buď \mathbf{R}^n , nebo \mathbf{R}_+^n . Proto podle předchozího platí

$$\begin{aligned} \int_M d\rho_\alpha \eta &= \int_{U_\alpha} d\rho_\alpha \eta = \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)} (d\rho_\alpha \eta)|_{U_\alpha} = \\ &= \int_{\partial \varphi_\alpha(U_\alpha)} (\rho_\alpha \eta)|_{U_\alpha} = \int_{\partial U_\alpha} \rho_\alpha \eta = \int_{\partial M} \rho_\alpha \eta, \end{aligned}$$

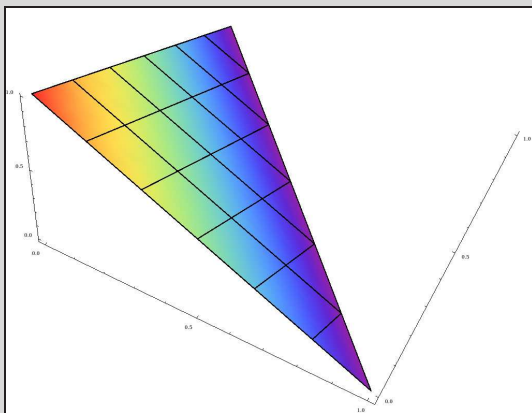
což vzhledem k linearitě uzavírá důkaz. □

Příklad 83. Bud' $\eta = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$ diferenciální forma na \mathbf{R}^3 zúžená na $\iota: \mathbf{S}^2 \hookrightarrow \mathbf{R}^3$. Spočítejte $\int_{\mathbf{S}^2} \iota^* \eta$ přímo a pomocí Stokesovy věty.

Příklad 84. Dokažte Stokesovu větu přímo pro jednotkovou krychli v \mathbf{R}^n .

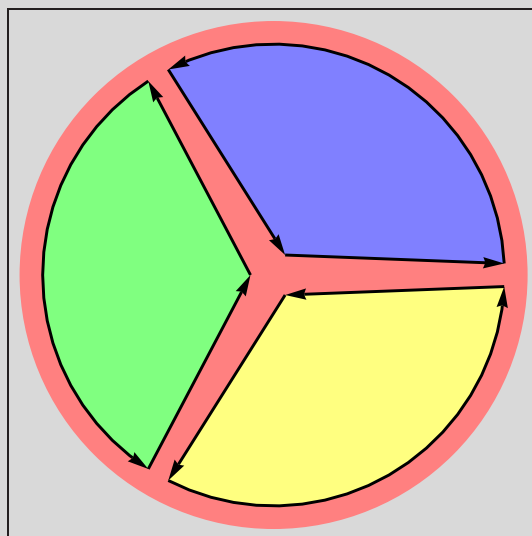
Příklad 85. Dokažte Stokesovu větu přímo pro simplex $x, y, z \geq 0, x + y + z \leq 1$.

3.5. De Rhamova věta. Definujme nyní *standardní n -simplex* $\Delta^n = \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n t_i = 1\}$.



Standardní simplex Δ^2 v \mathbf{R}^3 .

Potom *n -simplexem* na M rozumíme spojitě zobrazení $\sigma_n: \Delta^n \rightarrow M$. Toto zobrazení nemusí být injektivní, různé simplexity mohou mít překrývající se obory hodnot v M . Hranicí simplexu rozumíme obraz hranice standardního simplexu, hranice standardního n -simplexu se skládá z $(n-1)$ -simplexů, což můžeme reprezentovat jako formální součet s alternujícím znaménkem značícím orientaci. Formální součet je prvkem komutativní grupy $C_n(M)$ generované nespočetnou množinou všech obrazů standardních simplexů. Prvky této abelovské grupy se nazývají *řetězce*.



Kruh v \mathbf{R}^2 reprezentovaný jako součet obrazů tří 2-simplexů.

Hraniční operátor ∂ rozšíříme na řetězce $\partial_r : C_r(M) \rightarrow C_{r-1}(M)$ a získáme zobrazení

$$C_n(M) \xrightarrow{\partial_n} \dots \xrightarrow{\partial_{r+1}} C_r(M) \xrightarrow{\partial_r} C_{r-1}(M) \xrightarrow{\partial_{r-1}} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0(M),$$

pro která zjevně platí $\partial_r \circ \partial_{r+1} = 0$. Označme $Z_r(M) = \ker \partial_r$ podgrupu *r-cyklů* a $B_r(M) = \text{im } \partial_{r+1}$ podgrupu *r-hranic*. Zjevně $B_r(M) \subset Z_r(M)$. Faktorgrupu $H_r(M) = Z_r(M)/B_r(M)$ nazýváme *r-tou homologickou grupou* M . Maximální počet lineárně nezávislých prvků $H^r(M)$ je b_r , *r-té Bettiho číslo*. Pro kompaktní variety platí $b_r < \infty$.

Integrace je aditivní operace vzhledem k sjednocení integračních oborů. Na integrál se tedy můžeme dívat jako na dualitu mezi řetězci a diferenciálními formami, tj.

$$(\sigma, \eta) := \int_{\text{im } \sigma} \eta.$$

Stokesova věta potom říká, že operátory hranice ∂ a vnější derivace d jsou si sdruženými operátory vzhledem k této dualitě, tj.

$$(\partial\sigma, \eta) = (\sigma, d\eta).$$

Diferenciální formy jsou tedy duální řetězce, tzv. kořetězce a dostáváme

$$\Omega_c^0(M) \xrightarrow{d_0} \Omega_c^1(M) \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_{r-1}} \Omega_c^r(M) \xrightarrow{d_r} \dots \xrightarrow{d_{n-1}} \Omega_c^n(M) \xrightarrow{d_n} \{0\}.$$

Označme

$$Z^r(M) = \{\eta \in \Omega_c^r(M) \mid d\eta = 0\}$$

$$B^r(M) = \{\eta \in \Omega_c^r(M) \mid \eta = d\alpha, \alpha \in \Omega_c^{r-1}(M)\}.$$

Prvky $Z^r(M)$ nazýváme *exaktní* r -formy, prvky $B^r(M)$ *uzavřené* r -formy. Poincarého lemma nám říká, že $Z^r(M) \subset B^r(M)$. Příslušnou faktorgrupu $H^r(M) = B^r(M)/Z^r(M)$ nazýváme r -tou *de Rhamovou kohomologickou grupou* variety M . Obsahem de Rhamovy věty je skutečnost, že de Rhamova kohomologická grupa $H^r(M)$ je izomorfní duální homologické grupě $H_r^*(M)$, kde dualita je vzhledem k integraci.

Příklad 86. Uvažme $M = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Ukažte, že lineární diferenciální forma

$$\eta = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$$

na M je uzavřená, ale není exaktní.

Příklad 87. Uzavřené 1-formy na M jsou tedy $\omega = df + k\eta$. Užitím Stokesovy věty spočítejte číslo k pomocí ω . Formu η nazýváme generátorem $H^1(M)$.

Příklad 88. ★ Ukažte, že

$$H^r(\mathbf{S}^n \times (0,1)^m) = \begin{cases} \mathbf{R} & r = 0, r = n, \\ \{0\} & \text{jinak,} \end{cases}$$

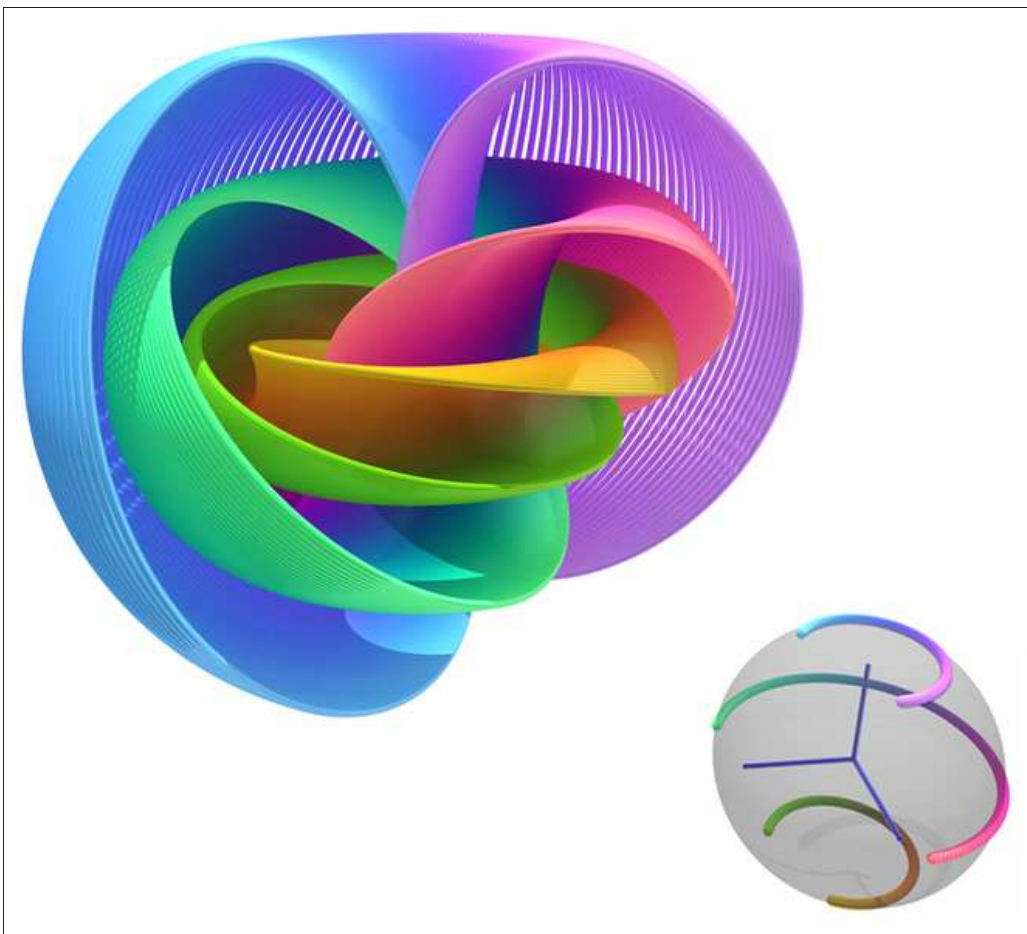
pomocí Mayer–Vietorisovy posloupnosti a stereografických projekcí.

Příklad 89. Najděte uzavřenou 2-formu na \mathbf{S}^2 , jež není exaktní, tj. generátor kohomologické grupy $H^2(\mathbf{S}^2)$.

Příklad 90. ★ (Hopfova fibrace). Vezměme $\mathbf{S}^3 \subset \mathbf{C}^2$, $\mathbf{S}^3 = \{(z, w) \in \mathbf{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}$. Na \mathbf{C}^2 definujme relaci ekvivalence $(z, w) \sim (z', w')$ tehdy a jen tehdy, je-li $(z', w') = \lambda(z, w)$, kde $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$. Vzniklý faktorprostor je komplexní projektivní rovina, též známá jako Riemannova sféra. Vezmeme-li navíc $|\lambda| = 1$, respektuje relace ekvivalence \mathbf{S}^3 a dostáváme tzv. Hopfovou fibraci H

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{S}^1 & \hookrightarrow & \mathbf{S}^3 \\ & & \downarrow H \\ & & \mathbf{S}^2 \equiv \mathbf{C}P^1. \end{array}$$

Fibr nad každým bodem \mathbf{S}^2 je difeomorfní ke kružnici.



Znázornění Hopfovy fibrace. Rovnoběžkám odpovídají jako vzory zobrazením H tory. Odpovídající si body mají stejnou barvu. S^3 je znázorněno pomocí stereografické projekce na \mathbf{R}^3 , \mathbf{R}^3 je zobrazeno na otevřené kouli (převzato od Nilese Johnsona).

Budeme se nyní zabývat vlastnostmi libovolného zobrazení $F: \mathbf{S}^3 \rightarrow \mathbf{S}^2$. Označme α generátor $H^2(\mathbf{S}^2)$ (viz. předchozí příklad). Jelikož $H^2(\mathbf{S}^3) = \{0\}$, existuje na \mathbf{S}^3 lineární forma ω tak, že $F^* \alpha = d\omega$. Ukážeme, že číslo

$$h(F) = \int_{\mathbf{S}^3} \omega \wedge d\omega$$

je nezávislé na volbě ω a nazýváme jej *Hopfův invariant*. Bud' $F^* \alpha = d\omega'$, tj. $d(\omega - \omega') = 0$. Potom

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{S}^3} \omega \wedge d\omega - \int_{\mathbf{S}^3} \omega' \wedge d\omega' &= \int_{\mathbf{S}^3} (\omega - \omega') \wedge d\omega = \\ &= \int_{\mathbf{S}^3} d[(\omega - \omega') \wedge \omega] = 0, \end{aligned}$$

kde poslední rovnost získáme použitím Stokesovy věty.

Ve skutečnosti je $h(F)$ vždy celé číslo, jež lze získat z vlastností $F^{-1}(p)$ a $F^{-1}(q)$ libovolných regulárních hodnot F . Jedná se o tzv. *uzlové číslo*.

Dvě zobrazení $F_i: M \rightarrow N$, $i \in \{0, 1\}$ jsou *homotopická*, existuje-li hladké zobrazení $F: M \times [0, 1] \rightarrow N$, tzv. *homotopie*, takové, že $F(p, 0) = F_0(p)$ a $F(p, 1) = F_1(p)$. Viz příklad 9, kde F_0 je vložení válce do \mathbf{R}^3 a F_1 je vložení $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ do \mathbf{R}^3 .

Lemma 22. *Homotopická zobrazení mají shodný Hopfův invariant.*

Důkaz. Bud' F homotopie mezi F_0 a F_1 a $\iota_i: \mathbf{S}^3 \rightarrow \mathbf{S}^3 \times [0, 1]$ vložení $\iota_i: p \mapsto (p, i)$. Potom $F \circ \iota_i = F_i$.

Bud' $\alpha \in H^2(\mathbf{S}^2)$ generátor. Potom $F^* \alpha = d\omega$ pro 1-formu ω na $\mathbf{S}^3 \times [0, 1]$. Definujme $\omega_i = \iota_i^* \omega$. Potom $F_i^* \alpha = d\omega_i$ a rovněž $\omega_i \wedge d\omega_i = \iota_i^*(\omega \wedge d\omega)$.

Počítejme tedy

$$\begin{aligned} h(F_1) - h(F_0) &= \int_{\mathbf{S}^3} \omega_1 \wedge d\omega_1 - \int_{\mathbf{S}^3} \omega_0 \wedge d\omega_0 = \int_{\mathbf{S}^3} \iota_1^*(\omega \wedge d\omega) - \int_{\mathbf{S}^3} \iota_0^*(\omega \wedge d\omega) = \\ &= \int_{\mathbf{S}^3 \times \{1\}} \omega \wedge d\omega - \int_{\mathbf{S}^3 \times \{0\}} \omega \wedge d\omega = \int_{\partial(\mathbf{S}^3 \times [0, 1])} \omega \wedge d\omega = \\ &= \int_{\mathbf{S}^3 \times [0, 1]} d\omega \wedge d\omega = \int_{\mathbf{S}^3 \times [0, 1]} F^*(\alpha \wedge \alpha) = 0. \end{aligned}$$

Poslední rovnost platí z dimenzionálních důvodů, jelikož $\alpha \wedge \alpha$ je 4-forma na \mathbf{S}^2 . \square

Spočteme nyní Hopfův invariant pro Hopfovu fibraci H (a všechna s ní homotopická zobrazení). Z předchozích výpočtů víme, že plošný element (normovaný na jedničku) na sféře \mathbf{S}^2 (vložené v \mathbf{R}^3) dostaneme jako

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} (x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy).$$

Jelikož $dr \wedge \sigma = r/4\pi dx \wedge dy \wedge dz$, jedná se o kladný generátor. Pro $z \neq 0$ lze psát

$$\sigma = \frac{dx \wedge dy}{4\pi z}.$$

Inverzní stereografická projekce $s: \mathbf{CP}^1 \rightarrow \mathbf{S}^2 \subset \mathbf{R}^3$ je pro body typu $[z, 1]$ dána

$$z = u + iv \mapsto \left(\frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \frac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2} \right).$$

Pullbackem $s^* \sigma$ dostaneme generátor na \mathbf{CP}^1 , což po spočtení dává

$$s^* \sigma = -\frac{i}{2\pi} \frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1+|z|^2)^2}.$$

Orientace na podmnožině CP^1 neobsahující bod v nekonečnu je konvenčně zadána naopak (tj. stereografická projekce mění orientaci), vezmeme proto

$$\alpha = \frac{i}{2\pi} \frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1+|z|^2)^2}$$

a provedeme pullback zobrazením $H: (z, w) \mapsto z/w$. Označme $z = x^1 + ix^2$ a $w = x^3 + ix^4$. Potom dostaneme

$$H^* \alpha = \frac{1}{\pi} (dx^1 \wedge dx^2 + dx^3 \wedge dx^4)$$

a chceme-li najít $H^* \alpha = d\omega$, vede to např. k

$$\omega = \frac{1}{\pi} (x^1 dx^2 + x^3 dx^4).$$

Po parametrizaci v zobecněných sférických souřadnicích dostáváme

$$h(H) = 1.$$

4. Riemannova geometrie à la Cartan

V této kapitole se budeme zabývat převážně Riemannovou geometrií, začneme se zabývat konexemi na bundlu ortonormálních repérů, dokážeme existenci Levi-Civitovy konexe a spočteme její křivost. Využívat budeme Frobeniovu větu.

4.1. Bandl repérů a konexe na něm. V okolí každého bodu p hladké variety M můžeme zadat tzv. *pohyblivý repér*, tj. maximální lineárně nezávislý systém vektorových polí (ξ_1, \dots, ξ_n) , zejména toto lze provést v bodě p . Na množině dvojic (p, e) , kde $e = (e_1, \dots, e_n)$ je báze tečného prostoru $T_p M$, lze zavést strukturu bundlu obdobným způsobem jako jsme to provedli pro vektorové bundly, takto vzniklý bandl $F(M)$ se nazývá *bandl repérů*. Opět existuje přirozeně definovaná projekce $\pi: F(M) \rightarrow M$ a také platí, že lokální souřadnicový systém $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ na M zadává lokální souřadnicový systém $(\pi^{-1}(U), (x^i, X_k^j))$, $e_k = \sum_j X_k^j \partial / \partial x^j$ vzhledem k tomu, že každou bázi v $T_p M$ lze vyjádřit pomocí souřadnicové báze, zde $X = (X_k^j) \in GL(n)$ je regulární matice. Z toho je zřejmé, že $\dim F(M) = n + n^2$. Můžeme tedy definovat zobrazení $\pi^{-1}(U) \rightarrow U \times GL(n)$, $\Psi(p, e) \mapsto (p, X)$, které rovněž nazýváme *lokální trivializace* ve shodě s terminologií užívanou pro vektorové bundly. Obdobně definujeme *pohyblivé korepéry*, což jsou duální systémy bázevých lineárních forem.

Lieova grupa $GL(n)$ přirozeně působí na $F(M)$, tj. máme hladké zobrazení $R_A: GL(n) \times F(M) \rightarrow F(M)$. Bud' $A \in GL(n)$, potom

$$R_A((p, e)) = (p, eA) = (p, (\sum_{i=1}^n e_i A_j^i)).$$

Zjevně se zachovávají fibry, tj. $\pi \circ R_A = \pi$. Zobrazení R_A nazýváme *pravá translace* prvkem A . Obdobně definujeme *levou translaci* L_A .

Nyní se budeme zabývat transformačními vlastnostmi repérů. Bud' te $(U, \varphi = (x^i))$ a $(V, \psi = (y^j))$ dvě mapy na M , na $F(M)$ indukují mapy $(\pi^{-1}(U), (x^i, X_k^j))$ a $(\pi^{-1}(V), (y^i, Y_k^j))$. Potom na $\pi^{-1}(U \cap V)$ dostaneme

$$dy^i = \sum_j \frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^j,$$

$$(X^{-1})_k^j = \sum_i \frac{\partial y^i}{\partial x^k} (Y^{-1})_i^j,$$

z toho vyplývá, že $\sum_j (X^{-1})_j^i dx^j = \sum_j (Y^{-1})_j^i dy^j$ a tedy lineární diferenciální formy

$$\theta^i = \sum_j (X^{-1})_j^i dx^j \text{ maticově } \theta = dx X^{-1}$$

nejsou závislé na volbě souřadnic a tedy $\theta^i \in \Omega^1(F(M))$. Pfaffova soustava rovnic $\theta^i = 0$, $i \in \{0, \dots, n\}$ zadává tedy n^2 -rozměrnou *vertikální distribuci* V^{n^2} na $F(M)$. Vzhledem k tomu, že $dx^i = \sum_j X_j^i \theta^j$ je tato soustava ekvivalentní $dx^i = 0$, z toho plyne, že vertikální distribuce určuje tečné prostory k fibrům $\pi^{-1}(\{p\})$. Frobeniova podmínka nám říká, že

$$d\theta^i = \sum_j \theta_j^i \wedge \theta^j \text{ maticově } d\theta = -\theta \wedge \Theta,$$

pro $\Theta = (\theta_j^i), \theta_j^i \in \Omega^1(F(M))$. Formy θ_j^i zjevně nejsou určeny jednoznačně; $\bar{\theta}_j^i = \theta_j^i + \sum_k C_{jk}^i \theta^k$, kde $C_{jk}^i = C_{kj}^i$ jsou hladké funkce na $F(M)$ rovněž splňuje Frobeniovu podmínku.

Konexe na $F(M)$ je pravidlo určující distribuci H^n na $F(M)$ tak, že pro každý bod $(p, e) \in F(M)$ platí, že

- (i) $T_{(p,e)}F(M) = V_{(p,e)}^{n^2}F(M) \oplus H_{(p,e)}^nF(M)$,
- (ii) $(R_A)_{*,(p,e)}(H_{(p,e)}^nF(M)) = H_{R_A((p,e))}^n(F(M))$.

Tato distribuce je tedy určena vymizením soustavy n^2 lineárních forem θ_j^i na $F(M)$, které uspořádáme do matice 1-form Θ . Distribuce H^n tedy určuje, jak se repér (resp. korepér) změní při přechodu mezi blízkými fibry.

Odvodíme transformační formuli pro Θ při libovolné pravé translaci korepéru. Využijeme záměnnosti vnější derivace a pullbacku.

$$dR_A^*\theta = d(\theta A) = d\theta A - \theta \wedge dA = -\theta \wedge \Theta A - \theta \wedge dA.$$

Na druhé straně

$$R_A^*d\theta = -R_A^*(\theta \wedge \Theta) = -R_A^*\theta \wedge R_A^*\Theta = -\theta A \wedge R_A^*\Theta = -\theta \wedge A R_A^*\Theta.$$

Odtud máme

$$\theta A \wedge (A^{-1}\Theta A + A^{-1}dA - R_A^*\Theta)$$

a kvůli podmínce (ii) o invarianci horizontální distribuce vůči pravé translaci nakonec

$$R_A^*\Theta = A^{-1}\Theta A + A^{-1}dA.$$

Spočteme vnější derivaci výrazu

$$A R_A^*\Theta = \Theta A + dA.$$

Dostaneme

$$\begin{aligned} dA \wedge R_A^*\Theta + A dR_A^*\Theta &= d\Theta A - \Theta \wedge dA \\ (A R_A^*\Theta - \Theta A) \wedge R_A^*\Theta + A dR_A^*\Theta &= d\Theta A - \Theta \wedge (A R_A^*\Theta - \Theta A) \\ A dR_A^*\Theta + A R_A^*\Theta \wedge R_A^*\Theta &= d\Theta A + \Theta \wedge \Theta A. \end{aligned}$$

Odtud vidíme, že

$$\Omega = d\Theta + \Theta \wedge \Theta$$

se transformuje homogenně. Matici forem $\Omega \in \Omega^2(F(M))$ nazýváme *křivost* konexe Θ . Platí tzv. *Bianchiho identita*

$$d\Omega = d\Theta \wedge \Theta - \Theta \wedge d\Theta = (\Omega + \Theta \wedge \Theta) \wedge \Theta - \Theta \wedge (\Omega + \Theta \wedge \Theta) = \Omega \wedge \Theta - \Theta \wedge \Omega.$$

Lokálně zadáme konexi následovně: Buď $s_\alpha: U_\alpha \rightarrow F(U_\alpha)$ lokální řez $F(M)$, tj. pohyblivý repér na $U_\alpha \subset M$, potom $s^*\Theta$ je matice 1-form na U_α . Pullback $s^*R_A^* = (R_A \circ s)^*$ spočteme v souřadnicové bázi s uvážením skutečnosti, že při transformaci souřadnic $\alpha \rightarrow \beta$ násobíme repér Jacobiho maticí $J_{\beta\alpha}$, čímž získáme transformační vztahy

$$s_\beta^*\Theta = J_{\beta\alpha}^{-1} dJ_{\beta\alpha} + J_{\beta\alpha}^{-1} s_\alpha^*\Theta J_{\beta\alpha}$$

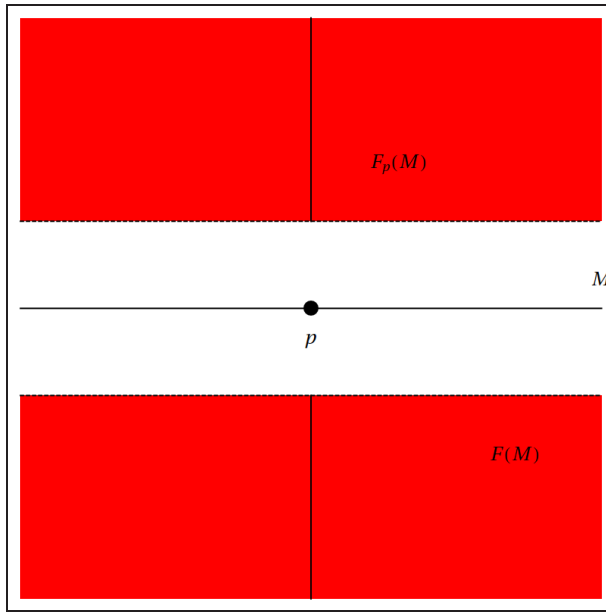
pro matice 1-form na $U_\alpha \cap U_\beta$. Naopak systém Θ_α matic 1-form na M splňující výše uvedené transformační vztahy zadává konexi na $F(M)$. V souřadnicové bázi 1-form na M dostáváme

$$s^*\theta_j^i = \sum_k \Gamma_{jk}^i dx^k,$$

systému funkcí Γ^i_{jk} říkáme *Christoffelovy symboly*. Na každé hladké varietě lze sestavit konexi, při konstrukci konexe se opět využívá rozklad jednotky.

Transformační vztahy pro křivost $s^*\Omega$ prozrazují, že se jedná o 2-formu na M ovšem s hodnotami v lineárních transformacích TM , tj. tenzorové pole typu $(3, 1)$ na M .

Příklad 91. Konexe na $F(\mathbf{R})$.



Nechť $HF(\mathbf{R}) = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \setminus \{0\}$ je generováno vektorovým polem

$$\eta(p, X) = b(p, X) \frac{\partial}{\partial x} + B(p, X) \frac{\partial}{\partial X}.$$

Kvůli podmínce (ii) musí platit

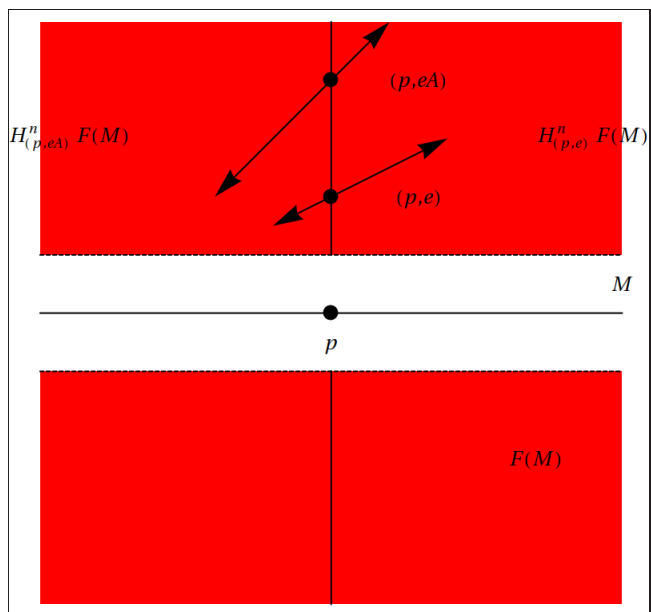
$$\eta(p, XA) = (R_A)_{*,(p,X)}(\eta(p, X)),$$

tedy $b(p, XA) = b(p, X)$ a $B(p, XA) = AB(p, X)$. Vezměme $X = 1$ a $b = 1$, potom

$$\eta(p, X) = \frac{\partial}{\partial x} + XB(p) \frac{\partial}{\partial X}.$$

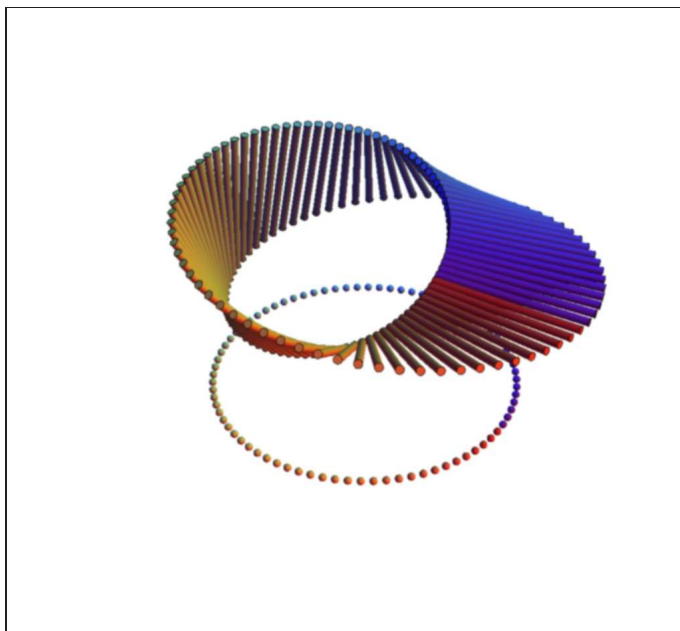
Anihilátor této distribuce je

$$\theta(p, X) = \frac{dX}{X} - B(x) dx.$$



Příklad 92. Bandl repérů pro \mathbf{S}^1 je triviální $\mathbf{R}^+ \hookrightarrow \mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{S}^1$, je difeomorfní válci C .

Příklad 93. Möbiův bandl jako deformace bandlu repérů na \mathbf{S}^1 , příklad tzv. hlavního bandlu.



Möbiova páska M jako hlavní bandl $\mathbf{R}^+ \hookrightarrow M \rightarrow \mathbf{S}^1$

Příklad 94. Přirozená konexe na \mathbf{R}^n je ve standardních souřadnicích zadána jako $\Theta = 0$.

Příklad 95. Transformujte přirozenou konexi v \mathbf{R}^2 do polárních souřadnic. Využijeme

vztahu

$$\Theta_{\text{pol}} = dJ_{\text{pol,nat}} J_{\text{pol,nat}}^{-1} + J_{\text{pol,nat}} \delta_{\alpha}^* \Theta_{\text{nat}} J_{\text{pol,nat}}^{-1},$$

kde $\Theta_{\text{nat}} = 0$. Dostáváme

$$\Theta_{\text{pol}} = \begin{pmatrix} \frac{\sin^2 \varphi}{r} dr & -d\varphi - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} dr \\ d\varphi - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} dr & \frac{\cos^2 \varphi}{r} dr \end{pmatrix}.$$

Příklad 96. Spočítejte křivost přirozené konexe na \mathbf{R}^2 v polárních souřadnicích. Zdůvodněte výsledek.

Příklad 97. Zadejte nějakou konexi na jednotkové sféře a paralelně jí přeneste tečný vektor $(1, 0, 0)$ na severním pólu $(0, 0, 1)$ do jižního pólu $(0, 0, -1)$.

Uvažme $\xi \in T_p M$ a repér $(p, e) \in \pi^{-1}(\{p\})$. Potom existuje právě jeden tečný vektor $\bar{\xi} \in H_{(p,e)}^n F(M)$ tak, že $\pi_{*,(p,e)}(\bar{\xi}) = \xi$. Necht' je zadána hladká křivka $c: [0, 1] \rightarrow M$, a repér $(c(0), e)$. Potom existuje právě jedna křivka $\bar{c}: [0, 1] \rightarrow F(M)$ tak, že

- (1) $\bar{c}(0) = e$,
- (2) $\pi \circ \bar{c} = c$,
- (3) $\bar{c}'(t) \in H_{\bar{c}(t)}^n F(M)$, pro $t \in [0, 1]$.

Křivce \bar{c} říkáme *horizontální lift* křivky c . Tímto způsobem jsme sestrojili izomorfismus prostorů bází $\pi^{-1}(\{c(0)\})$ a $\pi^{-1}(\{c(1)\})$, který nazýváme *paralelní transport*.

Při praktickém výpočtu horizontálního liftu a tím i paralelního přenosu jde vlastně o řešení (soustavy) obyčejných diferenciálních rovnic doplněných počátečními podmínkami.

Příklad 98. Paralelní přenos na $F(\mathbf{R})$. Tečný vektor k liftu \bar{c} musí ležet v $HF(\mathbf{R})$, tedy

$$x' \frac{\partial}{\partial x} + X' \frac{\partial}{\partial X} = K(t) \eta(x, X),$$

kde $K(t)$ je libovolná všude nenulová hladká funkce na $[0, 1]$. Srovnáním koeficientů dostáváme

$$X' = XBx'$$

a odtud integrací

$$X(t) = X(0) \exp \left(\int_0^t B(x(s)) x'(s) ds \right).$$

4.2. Riemannovy variety a Levi–Civita konexe. *Riemannova varieta* je dvojice (M, g) , kde M je hladká varieta a g je hladký řez vektorového bandlu $S^2 T^* M \rightarrow M$ zadávající v každém bodě $p \in M$ skalární součin na $T_p M$ předpisem $\langle \xi_p, \eta_p \rangle = g_p(\xi_p, \eta_p)$, je tedy v každém bodě pozitivně definitní. Řez g nazýváme *metrické tenzorové pole*. Pomocí rozkladu jednotky se dá ukázat, že na každé hladké varietě existuje hladké Riemannovo metrické pole. Pozitivní definitnost je výhodné požadovat s ohledem na pullback metrického pole na podvarietě, zde opět dostáváme pozitivně definitní metriku.

Na Riemannově varietě budeme pracovat s bandlem ortonormálních repérů $OF(M)$, ortonormalitu bereme vzhledem k metrickému tenzorovému poli g . Zjevně se jedná o podbandl bandlu všech repérů $F(M)$, $\dim OF(M) = n + n(n-1)/2$, získáme jej Gram–Schmidtovým ortogonalizačním procesem aplikovaným na pohyblivý repér. Konexe tedy bude určena maticí 1-forem s hodnotami v Lieově algebře ortogonální grupy $O(n)$, tato Lieova algebra je tvořena antisymetrickými maticemi. Konexe na Riemannově varietě tedy určuje infinitesimální otočení ortonormální báze při infinitesimálním posunu z daného bodu na varietě.

Věta 23. *Na Riemannově varietě (M, g) existuje právě jedna konexe $\Theta(g)$ indukovaná metrikou.*

Důkaz. Konexi zkonstruujeme tak, že ji zadáme na lokálních řezech. Je výhodnější pracovat v duálním prostoru $F^*(M)$, tj. bandlu korepérů. Bud' $(U, \varphi = (x^i))$ souřadný systém a $(\theta^1, \dots, \theta^n)$ ortonormální pohyblivý korepér získaný Gram–Schmidtovým ortogonalizačním procesem aplikovaným na korepér (dx^1, \dots, dx^n) , platí tedy

$$g = \sum_{i=1}^n \theta^i \theta^i = \theta \theta^T$$

Spočteme

$$d\theta^i = -\sum_j \theta^j \wedge \theta_j^i = -\sum_{j,k} A_{jk}^i \theta^j \wedge \theta^k,$$

maticově můžeme psát

$$d\theta = -\theta \wedge \Theta.$$

Touto rovností je antisymetrická $\Theta = (\theta_j^i)$ určena jednoznačně, připomeňme, že

$$\bar{\Theta} = (\bar{\theta}_j^i) = (\theta_j^i + \sum_k C_{jk}^i \theta^k),$$

kde

$$C_{jk}^i = -C_{ik}^j = -C_{ki}^j = C_{ji}^k = C_{ij}^k = -C_{kj}^i = -C_{jk}^i = 0.$$

□

Na závěr spočteme Levi-Civitovu konexi v souřadnicové bázi v lokální trivializaci. Obecnou konexi dostáváme jako

$$s^* \theta_j^i = \sum_k \Gamma_{jk}^i dx^k.$$

V dalším již nebudeme zapisovat pullback. Pro metrické tenzorové pole máme

$$g = g_{ij} dx^i dx^j.$$

Počítáme

$$dg_{ij} = \theta_i^k g_{kj} + \theta_j^k g_{ki}$$

a ze skutečnosti, že Levi-Civitova konexe je dána jednoznačně, vyplývá $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$. Označme $\Gamma_{ijk} = g_{im} \Gamma_{jk}^m$. Z předchozího potom plyne

$$g_{ij,k} = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik}.$$

Nyní zaměňujeme indexy

$$g_{ik,j} = \Gamma_{ikj} + \Gamma_{kij},$$

$$g_{jk,i} = \Gamma_{jki} + \Gamma_{kji}.$$

Sečteme první dvě rovnosti a odečteme od nich třetí

$$g_{ij,k} + g_{ik,j} - g_{jk,i} = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik} + \Gamma_{ikj} + \Gamma_{kij} - \Gamma_{jki} - \Gamma_{kji} = 2\Gamma_{ijk}$$

a odtud

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{im} (g_{jm,k} + g_{mk,j} - g_{jk,m}).$$

Příklad 99. Spočtete konexi a křivost v hyperbolickém prostoru $\mathbf{H}^{n+1} = \{(x^0, \dots, x^n) \in \mathbf{R}^{n+1} | x^0 > 0\}$, kde metrika je dána

$$g = \sum_i \frac{dx^i dx^i}{(x^0)^2}.$$

ortonormální báze korepérů je zjevně

$$\theta^i = \frac{dx^i}{x^0}, \quad d\theta^i = -\frac{dx^0 \wedge dx^i}{(x^0)^2} = -\theta^0 \wedge \theta^i$$

a tedy

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & -\theta^1 & \dots & -\theta^n \\ \theta^1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & \ddots & 0 \\ \theta^n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Křivost je

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \theta^0 \wedge \theta^1 & \theta^0 \wedge \theta^2 & \dots & \theta^0 \wedge \theta^n \\ * & 0 & \theta^1 \wedge \theta^2 & \dots & \theta^1 \wedge \theta^n \\ \vdots & * & \ddots & & \\ * & * & * & 0 & \theta^{n-1} \wedge \theta^n \\ * & * & * & * & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad 100. Paralelní přenos na \mathbf{H}^2 . Konexe je dána maticí lineárních forem

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & -\theta^1 \\ \theta^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pro křivku $c: [0, 1] \rightarrow \mathbf{H}^2 \subset \mathbf{R}^2$ danou předpisem $t \mapsto (x(t), y(t))$ dostáváme

$$\Theta(c'(t)) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{y'(t)}{x} \\ \frac{y'(t)}{x} & 0 \end{pmatrix}$$

a pro korepér $A \in O(2)$, tj. $A^T A = 1$ potom maticovou rovnicí

$$\frac{dA(t)}{dt} = A(t) \begin{pmatrix} 0 & -\frac{y'(t)}{x} \\ \frac{y'(t)}{x} & 0 \end{pmatrix}.$$

Z teorie obyčejných diferenciálních rovnic víme, že po zadání $A(0)$ dostaneme jednoznačné řešení $A(1)$.

Spočteme paralelní přenos z bodu $(1, 0)$ do bodu $(3, 0)$ po přímce $t \mapsto (1 + 2t, 0)$ a po pravé půlkružnici $t \mapsto (2 - \cos \pi t, \sin \pi t)$ s počáteční podmínkou $A(0) = 1$.

Pro přímku dostáváme $A(1) = A(0)$. Pro půlkružnici máme

$$\frac{dA(t)}{dt} = A(t) \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\pi \cos \pi t}{2 - \cos \pi t} \\ \frac{\pi \cos \pi t}{2 - \cos \pi t} & 0 \end{pmatrix}$$

Platí

$$\int_0^1 \frac{\pi \cos \pi t}{2 - \cos \pi t} dt = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1 \right) \pi = \alpha$$

a tedy vzhledem ke komutativitě $O(2)$

$$A(1) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

a ortonormální báze se otočí o úhel α . Paralelní přenos tedy obecně závisí na volbě křivky c .

Příklad 101. Spočítejte konexi a křivost na sféře S^n s metrikou indukovanou z \mathbf{R}^{n+1} . Ukážeme výpočet pro S^2 . Zvolme proto sférické souřadnice (θ, φ) na okolí $S^2 \setminus \{\text{Greenwichský poledník}\}$. Metriku lze zapsat jako $g = (d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\varphi)^2$, ortonormální korepér je dán jako $(\omega^1 = d\theta, \omega^2 = \sin \theta d\varphi)$. Spočteme diferenciál

$$d\omega^1 = 0, d\omega^2 = \cos \theta d\theta \wedge d\varphi = \cotg \theta \omega^1 \wedge \omega^2.$$

Z toho pro Levi-Civitovu konexi plyne

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & \cotg \theta \omega^2 \\ -\cotg \theta \omega^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a pro křivost dostáváme

$$\Omega = d\Theta + \Theta \wedge \Theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \omega^1 \wedge \omega^2,$$

tedy konstantní matici násobenou plošným elementem.

Z křivosti se dají bodovými operaci spočítat další tenzorová pole. *Ricciho křivost* je definována pomocí kontrakce v první (a jediné) kontravariantní složce a druhé kovariantní složce C_2^1 . Zapišme křivost tenzorově

$$\Omega = \sum_{i,j,k,\ell} R_{j k \ell}^i e_i \otimes \theta^j \otimes \theta^k \wedge \theta^\ell,$$

kde (e_i) je ortonormální pohyblivý repér duální ke korepéru (θ^i) .

$$\text{Ricci} = C_2^1(\Omega).$$

Je to symetrické tenzorové pole, je řezem vektorového bandlu $S^2 T^* M$. Zvednutím prvního indexu $\#_1$ lze z Ricciho tenzoru vyrobit řez vektorového bandlu $TM \otimes T^* M$, tedy symetrický operátor na TM . Platí tedy $\text{Ricci}(\xi, \eta) = g(\xi, \#_1(\text{Ricci})\eta)$, kde ξ a η jsou libovolná vektorová pole na M . *Skalární křivost* Scal definujeme jako stopu operátoru $\#_1(\text{Ricci})$. Tyto operátory se vyskytují na levé straně Einsteinových rovnic

$$\text{Ricci} - \frac{1}{2} g \text{Scal} - \Lambda g = \frac{8\pi k}{c^4} T,$$

kde Λ je kosmologická konstanta, k je Newtonova gravitační konstanta, c je rychlost světla a T je tenzorové pole energie–hybnosti. Tenzorovému poli $\text{Ricci} - \frac{1}{2} g \text{Scal}$ se říká *Einsteinovo tenzorové pole*.

Příklad 102. Spočítejte Einsteinovo tenzorové pole pro hyperbolický prostor \mathbf{H}^{n+1} .

4.3. Geodetiky. Na Riemannově varietě (M, g) lze přirozeně definovat *délku* hladké křivky $c: [a, b] \rightarrow M$ jako integrál

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{g(c', c')} \, ds.$$

a pomocí ní vzdálenost dvou bodů $p = c(a)$ a $q = c(b)$

$$d(p, q) = \inf_c L(c)$$

kde infimum uvažujeme přes všechny hladké křivky $c: [a, b] \rightarrow M$ spojující body p a q . Pokud existuje hladká křivka c taková, že $L(c) = d(p, q)$, nazýváme ji *geodetikou* spojující body p a q .

Příklad 103. Ukažte, že délka křivky $L(c)$ nezávisí na její parametrizaci.

Příklad 104. Určete geodetiky v euklidovské rovině \mathbf{R}^2 .

Příklad 105. Uvažujte euklidovskou rovinu $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ s vyjmutým počátkem. Lze spojit geodetikou body $(-a, 0)$ a $(a, 0)$? Jaká je vzdálenost těchto dvou bodů?

Zaved'me *akci* hladké křivky na Riemannově varietě vztahem

$$A(c) = \frac{1}{2} \int_a^b g(c', c') \, ds.$$

Lemma 24. *Platí*

$$L(c)^2 \leq 2(b-a)A(c),$$

přičemž rovnost nastává pro parametrizaci konstantním násobkem délky oblouku, tj. $g(c', c') = \text{konst}$.

Důkaz. Rovnost ukážeme na souřadnicovém okolí; křivky, jejichž obraz nepadne do jediného souřadnicového okolí, reprezentujeme jako kompozice křivek, jejichž obrazy v jediném souřadnicovém okolí leží a využijeme linearitu integrálu vzhledem ke sčítání jednorozměrných řetězců.

Množina reálných funkcí $C^\infty([a, b])$ je vektorovým prostorem se skalárním součinem

$$\langle u, v \rangle = \int_a^b u(s)v(s) \, ds.$$

Zapišeme Cauchy-Buňakovského nerovnost pro tento případ a posléze položíme $u(s) = \sqrt{g(c', c')}$ a $v(s) = 1$.

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle^2 &\leq \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle \\ \left(\int_a^b u(s)v(s) \, ds \right)^2 &\leq \int_a^b u^2(s) \, ds \int_a^b v^2(s) \, ds \\ \left(\int_a^b \sqrt{g(c', c')} \, ds \right)^2 &\leq \int_a^b g(c', c') \, ds \int_a^b 1 \, ds, \end{aligned}$$

což jsme chtěli ukázat. Rovnost jak známo nastává, pokud je funkce u násobkem druhé funkce v , tj. $g(c', c')$ musí být násobkem jednotkové funkce, což dává druhou část lemmatu. \square

Spočteme nyní Euler-Lagrangeovy rovnice funkcionálu $A(c)$ v lokálním souřadnicovém systému, souřadnice křivky budeme značit $x^i(s)$. Lagrangian je

$$L = g_{ij}(x^k) \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds}$$

a dostáváme

$$-\frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \frac{dx^k}{ds}} + \frac{\partial L}{\partial x^k} = 0.$$

Spočteme napřed

$$\frac{\partial L}{\partial \frac{dx^k}{ds}} = g_{kj} \frac{dx^j}{ds} + g_{ik} \frac{dx^i}{ds} = 2g_{ik} \frac{dx^i}{ds},$$

potom

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \frac{dx^k}{ds}} = 2g_{ik,j} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} + 2g_{ik} \frac{d^2 x^i}{ds^2} = (g_{ik,j} + g_{jk,i}) \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} + 2g_{ik} \frac{d^2 x^i}{ds^2}$$

Dále spočteme

$$\frac{\partial L}{\partial x^k} = g_{ij,k} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds}.$$

Euler-Lagrangeovy rovnice tedy můžeme psát (po vynásobení g^{-1}) jako

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0.$$

Umíme-li paralelně transportovat báze, umíme paralelně transportovat i tečné vektory, prostě daný vektor zvolíme jako první prvek báze. Pro souřadnice vektoru $c^i \partial / \partial x^i$ transportovaného po křivce $x^j(s)$ dostáváme diferenciální rovnice

$$\frac{dc^i}{ds} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} c^k = 0$$

a srovnáním s rovnicemi pro geodetiky dostáváme geometrickou charakterizaci geodetik.

Geodetiky jsou křivky, po nichž se tečný vektor ke křivce paralelně přenáší sám na sebe, říká se jim také *autoparalelní*. Vzhledem k úvodnímu lemmatu jsou parametrizovány konstantním násobkem své délky.

Věta 25. *Z každého bodu $p \in M$ vychází geodetika c ve směru každého vektoru $\xi \in T_p(M)$, podrobněji $c: [0, a] \rightarrow M$, $c(0) = p$, $c'(0) = \xi$, a bereme vždy maximální možné.*

Důkaz. Věta přímo plyne z existence a jednoznačnosti řešení počáteční úlohy pro soustavy obyčejných diferenciálních rovnic. \square

Předchozí větu lze využít na definici vzdálenosti v tečném prostoru TM . Vezměme dva body v TM , tj. dvě dvojice (p, ξ) a (q, η) a zkonstruujme k nim geodetiky $c: [0, a] \rightarrow M$ a $d: [0, b] \rightarrow M$. Potom nastane jedna ze dvou možností

- (i) geodetiky se alespoň jednou protnou, tj. existuje $\alpha \in [0, a], \beta \in [0, b]$ tak, že $c(\alpha) = d(\beta) = r$, pokud existuje takových α a β více, zvolíme vždy jejich minimální hodnoty. V takovém případě definujeme $D((p, \xi), (q, \eta)) = d(p, r) + d(r, q)$.
- (ii) geodetiky se neprotnou, v takovém případě klademe $D((p, \xi), (q, \eta)) = \infty$.

Dá se ukázat, že funkce D je metrikou na TM , tato poznámka ukončuje důkaz, že TM je hladkou varietou ze druhé kapitoly.