Gradient, rotace a divergence pomocí forem

V první řadě je třeba si uvědomit, že na n-rozměrných kouscích $\mathbb{R}^n$ umíme integrovat jen a pouze n-formy. Abychom mohli integrovat funkce v $\mathbb{R}^3$ je třeba zadat objemový element ω, tj. všude nenulovou 3-formu, která v každém bodě zadává objem rovnoběžnostěnu určeného třemi vektory v tomto bodě. Zadání takovéto 3-formy ω nastoluje v každém bodě $x \in \mathbb{R}^3$ následující izomorfizmy

$$C^\infty_x(\mathbb{R}^3) \ni f(x) \cong \alpha(x) = f(x)\omega(x) \in \Lambda^3 T^*_x\mathbb{R}^3, \tag{1}$$
$$T_x\mathbb{R}^3 \ni v(x) \cong \beta(x) = i(v(x))\omega(x) \in \Lambda^2 T^*_x\mathbb{R}^3, \tag{2}$$
$$\Lambda^2 T_x\mathbb{R}^3 \ni V(x) \cong \gamma(x) = i(V(x))\omega(x) \in \Lambda^1 T^*_x\mathbb{R}^3. \tag{3}$$

Ty jsou dány následovně:

(1) Vynásobením objemového elementu v bodě x $\omega(x)$ hodnotou funkce v bodě x $f(x)$ dostáváme 3-formu a naopak.

(2) Kontrakcí objemového elementu v bodě x $\omega(x)$ hodnotou vektorového pole v bodě x $v(x)$ dostáváme 2-formu a naopak.

(3) Kontrakcí objemového elementu v bodě x $\omega(x)$ hodnotou bivektorového pole v bodě x $v(x)$ dostáváme 1-formu a naopak.

Divergence. Pojem divergence vektorového pole je z tohoto pohledu nejobecnější, protože k jeho definici postačuje pojem objemového elementu (divergence vektorového pole zadaného v ortonormální bázi v této chvíli ale nedává smysl). Zvolíme objemový element

$$\omega = a \,\mathrm{d}\, u^1 \wedge \mathrm{d}\, u^2 \wedge \mathrm{d}\, u^3$$

a provedeme jeho kontrakci vektorovým polem $v = v^i\partial/\partial u^i$

$$i(v)\omega = av^1 \,\mathrm{d}\, u^2 \wedge \mathrm{d}\, u^3 + a(x)v^2 \,\mathrm{d}\, u^3 \wedge \mathrm{d}\, u^1 + a(x)v^3 \,\mathrm{d}\, u^1 \wedge \mathrm{d}\, u^2.$$

Spočteme vnější derivaci vzniklé 2-formy

$$\mathrm{d}[i(v)\omega] = \left[\frac{\partial(av^1)}{\partial u^1} + \frac{\partial(av^2)}{\partial u^2} + \frac{\partial(av^3)}{\partial u^3}\right] \mathrm{d}\, u^1 \wedge \mathrm{d}\, u^2 \wedge \mathrm{d}\, u^3$$

a určíme funkci, která odpovídá této 3-formě

$$\mathrm{div}_\omega\, v = \frac{1}{a}\left[\frac{\partial(av^1)}{\partial u^1} + \frac{\partial(av^2)}{\partial u^2} + \frac{\partial(av^3)}{\partial u^3}\right]. \tag{4}$$

Tuto funkci nazveme divergencí vektorového pole v (vzhledem k objemovému elementu ω). Povšimneme si, že tato konstrukce dává smysl pro každou dimenzi, nejen pro $n = 3$.

Rotace. Rotace 1-formy β je vektorové pole (toto vektorové pole není samozřejmě zadáno v ortonormální bázi, protože není zadán skalární součin v tečných prostorech nad body $\mathbb{R}^3$) určené pomocí následující konstrukce. Opět zvolíme objemový element ω. Formu β vyjádříme souřadnicově

$$\beta = b_1 \,\mathrm{d}\, u^1 + b_2 \,\mathrm{d}\, u^2 + b^3 \,\mathrm{d}\, u^3$$

a spočteme její vnější derivaci

$$\mathrm{d}\,\beta = \left(\frac{\partial b_3}{\partial u^2} - \frac{\partial b_2}{\partial u^3}\right) \mathrm{d}\, u^2 \wedge \mathrm{d}\, u^3 + \left(\frac{\partial b_1}{\partial u^3} - \frac{\partial b_3}{\partial u^1}\right) \mathrm{d}\, u^3 \wedge \mathrm{d}\, u^1 + \left(\frac{\partial b_2}{\partial u^1} - \frac{\partial b_1}{\partial u^2}\right) \mathrm{d}\, u^1 \wedge \mathrm{d}\, u^2.$$

S využitím izomorfizmu (3) přiřadíme této 2-formě vektorové pole

$$\mathrm{rot}_\omega\, \beta = \frac{1}{a}\left[\left(\frac{\partial b_3}{\partial u^2} - \frac{\partial b_2}{\partial u^3}\right)\frac{\partial}{\partial u^1} + \left(\frac{\partial b_1}{\partial u^3} - \frac{\partial b_3}{\partial u^1}\right)\frac{\partial}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial b_2}{\partial u^1} - \frac{\partial b_1}{\partial u^2}\right)\frac{\partial}{\partial u^3}\right].$$

Toto vektorové pole nazveme rotací 1-formy β (vzhledem k objemovému elementu ω). Povšimněme si, že tato konstrukce má smysl pouze pro $n = 3$.

Zadáním skalárního součinu

$$g(x)\colon T_x\mathbb{R}^3 \times T_x\mathbb{R}^3 \ni (v(x), w(x)) \to g(x)(v(x), w(x)) \in C^\infty_x(\mathbb{R}^3)$$

v každém bodě x (takovému zobrazení se říká metrický tenzor) získáme izomorfizmus mezi prostorem tečných a kotečných vektorů v tomto bodě daný následovně

$$T_x\mathbb{R}^3 \ni v(x) \to g(x)(v(x), .) \in T^*_x\mathbb{R}^3.$$

V souřadnicích u^i je metrický tenzor zadán symetrickou 2-formou

$$g = g_{ij}\,\mathrm{d}\,u^i \odot \mathrm{d}\,u^j,$$

a izomorfizmus tečných a kotečných vektorů pomocí vztahu

$$v = v^i \frac{\partial}{\partial u^i} \to v^i g_{ij}\,\mathrm{d}\,u^j.$$

Takže získáme izomorfizmus mezi vektorovými poli a 1-formami (obecněji též izomorfizmus mezi kovariantními a kontravariantními tenzorovými poli stejného řádu), který je v souřadnicích u^i

Navíc zadáním skalárního součinu v každém bodě x získáme rovněž zcela přirozeně význačný objemový element ω_g a to takový: Dosadíme-li v libovolném bodě x do ω_g ortonormální bázi v tomto bodě, musí být hodnota $\omega(x)_g$ na těchto vektorech rovna 1. Z tohoto požadavku v souřadnicích u^i dostáváme

$$\omega_g = \sqrt{|\det g|}\,\mathrm{d}\,u^1 \wedge \mathrm{d}\,u^2 \wedge \mathrm{d}\,u^3.$$

Můžeme nyní jednoduše zavést gradient funkce f jako vektorové pole izomorfní k 1-formě vnější derivace $\mathrm{d}\,f$

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial u^i} g^{ij} \frac{\partial}{\partial u^j}, \tag{5}$$

kde g^{ij} je inverzní matice ke g_{ij}.

Argumentem rotace je v této chvíli 1-forma. Pomocí izomorfizmu zprostředkovaného skalárním součinem, můžeme vektorovému poli v přiřadit 1-formu β a její rotaci prohlásit za rotaci vektorového pole. Jako objemový element vezmeme objemový element určený g, tj. ω_g. V souřadnicích

$$\operatorname{rot}_{\omega_g} v = \frac{1}{\sqrt{|\det g|}} \left[\left(\frac{\partial g_{3i} v^i}{\partial u^2} - \frac{\partial g_{2i} v^i}{\partial u^3} \right) \frac{\partial}{\partial u^1} + \left(\frac{\partial g_{1i} v^i}{\partial u^3} - \frac{\partial g_{3i} v^i}{\partial u^1} \right) \frac{\partial}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial g_{2i} v^i}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{1i} v^i}{\partial u^2} \right) \frac{\partial}{\partial u^3} \right]. \tag{6}$$

Stejnětak můžeme zapsat divergenci vektorového pole

$$\operatorname{div}_{\omega_g} v = \frac{1}{\sqrt{|\det g|}} \left[\frac{\partial(\sqrt{|\det g|} v^1)}{\partial u^1} + \frac{\partial(\sqrt{|\det g|} v^2)}{\partial u^2} + \frac{\partial(\sqrt{|\det g|} v^3)}{\partial u^3} \right]. \tag{7}$$

Obzvlášť jednoduše vyjdou výše uvedené vztahy pro gradient rotaci a divergenci pokud má metrický tenzor v souřadnicích u^i diagonální tvar. Potom říkáme, že tyto souřadnice jsou ortogonální (tím chceme vyjádřit, že souřadnicová vektorová pole jsou v každém bodě na sebe kolmá).

$$g = g_{ij}\,\mathrm{d}\,u^i \odot \mathrm{d}\,u^j = \begin{pmatrix} \mathrm{d}\,u^1 & \mathrm{d}\,u^2 & \mathrm{d}\,u^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}\,u^1 \\ \mathrm{d}\,u^2 \\ \mathrm{d}\,u^3 \end{pmatrix}$$

$$g\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right) = g_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j, \\ h_i^2 & i = j. \end{cases}$$

Abychom tedy ze souřadnicové báze $\frac{\partial}{\partial u^i}$ vyrobili bázi v každém bodě ortonormální, musíme vydělit každý vektor jeho normou a ortonormální báze je tedy

$$\left\{ \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial u^1}, \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial u^2}, \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial u^3} \right\}$$

K ní duální báze v prostoru forem je

$$\left\{h_1\,\mathrm{d}\,u^1, h_2\,\mathrm{d}\,u^2, h_3\,\mathrm{d}\,u^3\right\}.$$

Zapišme tedy vektorové pole v v ortonormální bázi (souřadnice v ortonormální bázi označme V^i) a spočtěme jeho divergenci, rotaci (opět vyjádřenou v ortonormální bázi. Rovněž spočtěme gradient funkce f vyjádřený v ortonormální bázi.

$$v = \frac{V^i}{h_i}\frac{\partial}{\partial u^i} = \frac{V^1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u^1} + \frac{V^2}{h_2}\frac{\partial}{\partial u^2} + \frac{V^3}{h_3}\frac{\partial}{\partial u^3}$$

Spočteme napřed např. divergenci

$$\mathrm{div}_{\omega_g}\, v = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial(\frac{h_1h_2h_3}{h_1}V^1)}{\partial u^1} + \frac{\partial(\frac{h_1h_2h_3}{h_2}V^2)}{\partial u^2} + \frac{\partial(\frac{h_1h_2h_3}{h_3}V^3)}{\partial u^3}\right], \tag{8}$$

nyní rotaci

$$\mathrm{rot}_{\omega_g}\, v = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\left(\frac{\partial h_3V^3}{\partial u^2} - \frac{\partial h_2V^2}{\partial u^3}\right)\frac{h_1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u^1} + \left(\frac{\partial h_1V^1}{\partial u^3} - \frac{\partial h_3V^3}{\partial u^1}\right)\frac{h_2}{h_2}\frac{\partial}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial h_2V^2}{\partial u^1} - \frac{\partial h_1V^1}{\partial u^2}\right)\frac{h_3}{h_3}\frac{\partial}{\partial u^3}\right] \tag{9}$$

a nakonec gradient

$$\mathrm{d}\,f = \frac{\partial f}{\partial u^1}\mathrm{d}\,u^1 + \frac{\partial f}{\partial u^2}\mathrm{d}\,u^2 + \frac{\partial f}{\partial u^3}\mathrm{d}\,u^3 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u^1}h_1\,\mathrm{d}\,u^1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u^2}h_2\,\mathrm{d}\,u^2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u^3}h_3\,\mathrm{d}\,u^3$$

$$\mathrm{grad}\, f = \frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u^1}\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u^1} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u^2}\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial u^2} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u^3}\frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial u^3}. \tag{10}$$