Elektron v poli rovinné elektromagnetické vlny

1. Odvození rovnice druhého řádu z Diracovy rovnice v elektromagnetickém poli. Sleduji postup z Landau-Lifšic: Kvantová elektrodynamika, ale vše trochu podrobněji. Vyjdeme z Diracovy rovnice

$$[\gamma(\mathrm{i}\partial - eA) - m]\psi = 0,$$

na kterou aplikujeme operátor $\gamma(\mathrm{i}\partial - eA) + m$. Dostaneme rovnici

$$[\gamma^\mu\gamma^\nu(\mathrm{i}\partial_\mu - eA_\mu)(\mathrm{i}\partial_\nu - eA_\nu) - m^2]\psi = 0.$$

Dále rozepíšeme

$$\gamma^\mu\gamma^\nu = \tfrac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu) + \tfrac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu) = g^{\mu\nu} + \sigma^{\mu\nu},$$

dosadíme do předchozí rovnici a získáme

$$[(\mathrm{i}\partial - eA)^2 - m^2 + \sigma^{\mu\nu}(\mathrm{i}\partial_\mu - eA_\mu)(\mathrm{i}\partial_\nu - eA_\nu)]\psi = 0.$$

Dále upravíme poslední sčítanec následovně: $\sigma^{\mu\nu}$ je antisymetrická a operátor za ní tedy rozložíme na symetrickou a antisymetrickou část, přičemž symetrická část vzhledem k antisymetrii $\sigma^{\mu\nu}$ vypadne

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}(\mathrm{i}\partial_{[\mu} - eA_\mu)(\mathrm{i}\partial_{\nu} - eA_{\nu]})(\bullet) = \\
&\quad = \tfrac{1}{2}(\mathrm{i}e\partial_\mu(A_\nu\bullet) - \mathrm{i}e\partial_\nu(A_\mu\bullet) - \mathrm{i}eA_\mu\partial_\nu(\bullet) + \mathrm{i}eA_\nu\partial_\mu(\bullet)) = \\
&\qquad = \tfrac{1}{2}(\mathrm{i}e\partial_\mu A_\nu - \mathrm{i}e\partial_\nu A_\mu) = -\frac{\mathrm{i}e}{2}F_{\mu\nu}.
\end{aligned}$$

Celkem tedy dostáváme

$$\left[(\mathrm{i}\partial - eA)^2 - m^2 - \frac{\mathrm{i}e}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right]\psi = 0.$$

Dále spočtěme operátor $(\mathrm{i}\partial - eA)^2$ s využitím Lorentzovy kalibrační podmínky

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{i}\partial - eA)^2(\bullet) = g^{\mu\nu}(\mathrm{i}\partial_\mu - eA_\mu)(\mathrm{i}\partial_\nu - eA_\nu)(\bullet) = \\
&\quad = g^{\mu\nu}\left[-\partial_\mu\partial_\nu + e^2A_\mu A_\nu - \mathrm{i}eA_\mu\partial_\nu(\bullet) - \mathrm{i}e\partial_\mu(A_\nu\bullet)\right] = \\
&\quad = g^{\mu\nu}\left[-\partial_\mu\partial_\nu + e^2A_\mu A_\nu - \mathrm{i}eA_\mu\partial_\nu(\bullet) - \mathrm{i}e(\partial_\mu A_\nu)(\bullet) - \mathrm{i}eA_\nu\partial_\mu(\bullet)\right] = \\
&\qquad = g^{\mu\nu}\left[-\partial_\mu\partial_\nu + e^2A_\mu A_\nu - 2\mathrm{i}eA_\mu\partial_\nu(\bullet)\right]
\end{aligned}$$

Celkem tedy máme

$$\left[-\partial^2 + e^2A^2 - 2\mathrm{i}e(A\partial) - m^2 - \frac{\mathrm{i}e}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right]\psi = 0.$$

2. Elektron v poli rovinné vlny. Pole rovinné vlny s vlnovým vektorem k ($k^2 = 0$) závisí pouze na fázi vlny $\phi = kx$; podrobněji $A_\mu(x^\nu) = A_\mu(k_\nu x^\nu)$. Po použití Lorentzovy kalibrační podmínky $\partial_\mu A^\mu = 0$ dostáváme

$$\partial_\mu A^\mu(k_\nu x^\nu) = k_\mu(A^\mu)'(\phi) = 0,$$

po integraci této podmínky podle ϕ potom

$$k_\mu(A^\mu)(\phi) = C,$$

kde C je konstanta, kterou lze bez újmy na obecnosti položit rovnu nule vzhledem k tomu, že k čtyřpotenciálům A^μ lze vzhledem ke kalibrační volnosti přičíst libovolné konstanty. Na potenciály tedy klademe dodatečnou podmínku

$$k_\mu A^\mu = kA = 0.$$

Nyní dále upravujme výraz

$$\begin{aligned}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} &= \tfrac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = \tfrac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)(k_\mu A'_\nu - k_\nu A'_\mu) = \\ &= \tfrac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu k_\mu A'_\nu - \gamma^\mu\gamma^\nu k_\nu A'_\mu - \gamma^\nu\gamma^\mu k_\mu A'_\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu k_\nu A'_\mu) = \\ &= \tfrac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu k_\mu A'_\nu - (2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu\gamma^\mu)k_\nu A'_\mu - (2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu\gamma^\mu)k_\mu A'_\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu k_\nu A'_\mu) = \\ &= 2\gamma^\mu\gamma^\nu k_\mu A'_\nu = 2(\gamma k)(\gamma A') = 2\not{k}\not{A}'.\end{aligned}$$

Celkem tedy dostáváme

$$\left[-\partial^2 + e^2A^2 - 2\mathrm{i}e(A\partial) - m^2 - \mathrm{i}e(\gamma k)(\gamma A')\right]\psi = 0.$$

Předpokládejme řešení ve tvaru

$$\psi(x) = \exp(-\mathrm{i}px)F(\phi),$$

kde můžeme požadovat podmínku $p^2 = m^2$ tím, že ev. vynásobíme F odpovídající konstantou. Nyní dosadíme do předchozí rovnice a dostaneme obyčejnou diferenciální rovnici rovnici pro F

$$\begin{aligned}p^2F + 2\mathrm{i}pkF' - k^2F'' - 2eApF - 2\mathrm{i}eAkF' + e^2A^2F - m^2F - ie(\gamma k)(\gamma A')F = \\ = 2\mathrm{i}pkF' + [e^2A^2 - 2epA - ie(\gamma k)(\gamma A')]F = 0\end{aligned}$$

Integrací dostáváme

$$F = \exp\left\{-\mathrm{i}\int_0^{kx}\left[\frac{e}{(kp)}(pA) - \frac{e^2}{2(kp)}A^2\right]\mathrm{d}\phi + \frac{e}{2(kp)}(\gamma k)(\gamma A)\right\}u,$$

kde u je libovolný bispinor. Dále platí

$$\begin{aligned}(\gamma k)(\gamma A)(\gamma k)(\gamma A) = (\gamma k)[2(kA) - (\gamma k)(\gamma A)](\gamma A) = \\ -(\gamma k)(\gamma k)(\gamma A)(\gamma A) = -k^2A^2 = 0\end{aligned}$$

a tedy

$$\exp\left[\frac{e}{2(kp)}(\gamma k)(\gamma A)\right] = 1 + \frac{e}{2(kp)}(\gamma k)(\gamma A).$$

Výsledek výpočtu je tedy

$$\psi = \left[1 + \frac{e}{2(kp)}(\gamma k)(\gamma A)\right]u\exp(\mathrm{i}S),$$

kde

$$S = -px - \int_0^{kx}\left[\frac{e}{(kp)}(pA) - \frac{e^2}{2(kp)}A^2\right]\mathrm{d}\phi$$

se shoduje s klasickou akcí částice v poli rovinné elektromagnetické vlny.

Nyní předpokládejme, že pro $x \to \infty$ je $A \to 0$ a ψ musí tedy být řešením Diracovy rovnice pro volný elektron s hybností p a platí tedy

$$[(\gamma p) - m]u = 0.$$

Touto podmínkou vyloučíme řešení rovnice druhého řádu, která nejsou řešením rovnice prvního řádu (tzn. ta odpovídají pozitronu). Vzhledem k tomu, že u nezávisí na prostoročasových souřadnicích, musí tato podmínka platit nejen v nekonečnu, ale pro všechna x. Normování zvolíme $\bar{u}u = 2m$, normovaná vlnová funkce je pak ve tvaru

$$\psi = \left[1 + \frac{e}{2(kp)}(\gamma k)(\gamma A)\right]\exp(\mathrm{i}S)\frac{u}{\sqrt{2p_0}}$$

stejně jako pro volný elektron.

3. Výpočet hustoty proudu. Nyní vypočteme odpovídající proudovou hustotu. Spočteme Diracovsky sdruženou vlnovou funkci

$$\bar{\psi} = \frac{\bar{u}}{\sqrt{2p_0}} \left[1 + \frac{e}{2(kp)}(\gamma A)(\gamma k)\right] \exp(-\mathrm{i}S)$$

a dosadíme do vztahu pro proudovou hustotu j ve směru n

$$\begin{aligned} jn = \bar{\psi}(\gamma n)\psi = \\ = \frac{\bar{u}}{\sqrt{2p_0}} \left[1 + \frac{e}{2(kp)}(\gamma A)(\gamma k)\right] (\gamma n) \left[1 + \frac{e}{2(kp)}(\gamma k)(\gamma A)\right] \frac{u}{\sqrt{2p_0}} = \\ = \frac{1}{2p_0}\bar{u} \left\{(\gamma n) + \frac{e}{2(kp)} \left[(\gamma A)(\gamma k)(\gamma n) + (\gamma n)(\gamma k)(\gamma A)\right] + \right. \\ \left. + \frac{e^2}{4(kp)^2}(\gamma A)(\gamma k)(\gamma n)(\gamma k)(\gamma A)\right\} u \end{aligned}$$

Spočteme nyní jednotlivé sčítance. Např. přímým výpočtem dostaneme

$$\bar{u}(\gamma n)u = 2(pn).$$

Dále

$$\begin{aligned} (\gamma A)(\gamma k)(\gamma n) + (\gamma n)(\gamma k)(\gamma A) = \\ = 2(kn)(\gamma A) - (\gamma A)(\gamma n)(\gamma k) + (\gamma n)(\gamma k)(\gamma A) = \\ = 2(kn)(\gamma A) - 2(An)(\gamma k) + (\gamma n)(\gamma A)(\gamma k) + (\gamma n)(\gamma k)(\gamma A) = \\ = 2(kn)(\gamma A) - 2(An)(\gamma k) \end{aligned}$$

a tedy

$$\bar{u}\left[(\gamma A)(\gamma k)(\gamma n) + (\gamma n)(\gamma k)(\gamma A)\right] u = 4(kn)(pA) - 4(An)(pk).$$

Poslední sčítanec upravíme jako

$$(\gamma A)(\gamma k)(\gamma n)(\gamma k)(\gamma A) = 2(nk)(\gamma A)(\gamma k)(\gamma A) = -2(nk)A^2(\gamma k)$$

a tedy

$$\bar{u}(\gamma A)(\gamma k)(\gamma n)(\gamma k)(\gamma A)u = -4(nk)A^2(pk).$$

Celkem dostáváme

$$jn = \frac{1}{p_0} \left\{((p - eA)(n)) + \left[\frac{e(pA)}{(kp)} - \frac{e^2A^2}{2(kp)}\right](kn)\right\}.$$

Pro periodické funkce $A(\phi)$ je časová střední hodnota nulová a dostáváme

$$\langle j \rangle n = \frac{1}{p_0} \left[(pn) - \frac{e^2 \langle A^2 \rangle}{2(kp)} (kn) \right] .$$

Můžeme definovat efektivní hybnost jako časovou střední hodnotu hustoty toku

$$q = p - \frac{e^2 \langle A^2 \rangle}{2(kp)} k, \quad q^2 = p^2 - e^2 \langle A^2 \rangle,$$

z čehož lze vidět, že elektron se pohybuje v poli elektromagnetické vlny jako by měl efektivní hmotnost

$$m_\star = m \left(1 - \frac{e^2 \langle A^2 \rangle}{m^2} \right)^{1/4} ,$$

přičemž platí, že $m_\star > m$, protože pro elektromagnetickou vlnu platí $A^2 < 0$ (A je prostorupodobný vektor).