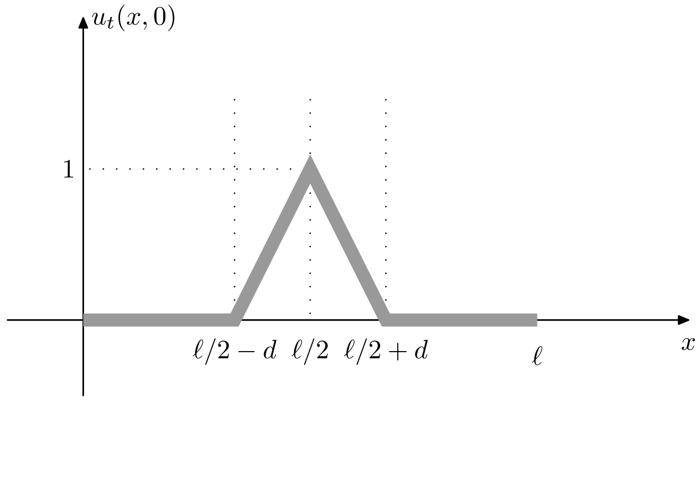
Zkoušková písemka M4100, 25.5.2005, 120 minut

1. Převeďte parciální diferenciální rovnici druhého řádu
$$x^2u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} - x^2u_x + (x+2)yu_y = 0$$
do kanonického tvaru a nalezněte její obecné řešení.

2. Nalezněte ohraničené řešení von Neumannova problému na vnějšku kruhu
$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0, & x^2+y^2 &> R^2, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(R\cos\phi, R\sin\phi) &= \sin^3\phi + \cos^3\phi. \end{aligned}$$

3. Řešte nehomogenní Laplaceovu rovnici na kouli
$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} &= 1, & x^2+y^2+z^2 &< R^2 \\ u(x,y,z) &= 0, & x^2+y^2+z^2 &= R^2. \end{aligned}$$

4. Řešte homogenní vlnovou rovnici konečnou strunu s počátečními a okrajovými podmínkami
$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2u_{xx} &= 0, & x &\in (0,\ell), t \in \mathbf{R} \\ u(0,t) &= 0, \\ u(\ell,t) &= 0, \\ u(x,0) &= 0, \end{aligned}$$
a $u_t(x,0)$ je zadána svým grafem



Zkoušková písemka M4100, 1.6.2005, 120 minut

1. Určete obecné řešení parciální diferenciální rovnice prvního řádu
$$xu_y - yu_x = \mathrm{e}^u$$
a potom nalezněte řešení vyhovující podmínce $u(x,x) = 0$.

2. Určete typ parciální diferenciální rovnice
$$(x^2-1)u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} + 2xu_x = 0,$$
uveďte ji do kanonického tvaru a určete její obecné řešení.

3. Řešte vnitřní Dirichletův problém na kruhu o poloměru R.
$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0, & x^2+y^2 &\le R^2,\\ u(R\cos\phi, R\sin\phi) &= (1+\cos^2\phi)^2, & \phi &\in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

4. Řešte Cauchyho úlohu pro parciální diferenciální rovnici
$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0 & x \in \mathbf{R},\quad t &\in \mathbf{R},\\ u(x,0) &= \sin x, & &\\ u_t(x,0) &= x\cos x. & & \end{aligned}$$

5. Řešte rovnici pro vedení tepla pro tyč délky ℓ, jejíž jeden konec je udržován na nulové teplotě a teplota druhého konce je konstantní (k tepelné výměně dochází jen v těchto dvou bodech). Počáteční teplota tyče nechť je nulová, difuzní koeficient lze uvažovat jednotkový.
$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0 & t \in \mathbf{R},\quad x &\in (0,\ell),\\ u(x,0) &= 0 & &\\ u(0,t) &= u_0 & u_0 &\in \mathbf{R},\\ u(\ell,t) &= 0. & & \end{aligned}$$

Zkoušková písemka M4100, 16.6.2005, 120 minut

1. Určete obecné řešení parciální diferenciální rovnice prvního řádu

$$u(yu_x + xu_y) = 1$$

a potom nalezněte řešení vyhovující podmínce $u(x, 0) = 1$.

2. Převeďte parciální diferenciální rovnici druhého řádu

$$x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} - x^2u_x - xyu_y = 0$$

do kanonického tvaru a nalezněte její obecné řešení.

3. Řešte Cauchyho úlohu pro homogenní vlnovou rovnici

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0 \qquad\qquad x \in \mathbf{R}, \quad t \in \mathbf{R}, \\ u(x, 0) &= \sin x, \\ u_t(x, 0) &= x \cos x. \end{aligned}$$

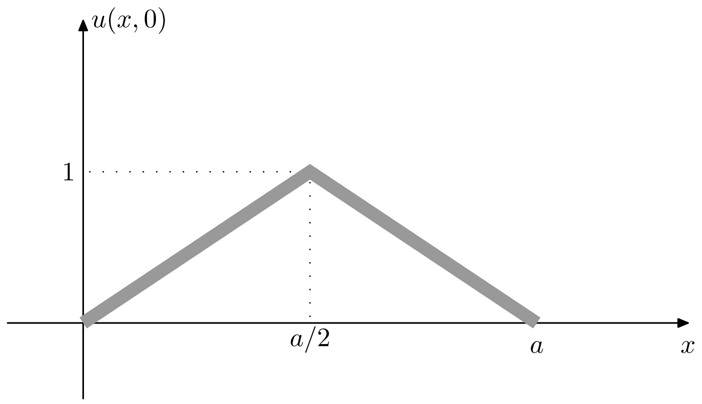
4. Nalezněte ohraničené řešení Dirichletova problému na vnějšku kruhu

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0, \qquad\qquad x^2 + y^2 > R^2, \\ u(R\cos\phi, R\sin\phi) &= \sin^3\phi - \cos^3\phi. \end{aligned}$$

5. Řešte parciální diferenciální rovnici

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 \qquad\qquad x \in (0, a), \quad y \in (0, b) \\ u(0, y) &= 0 \\ u(a, y) &= 0 \\ u(x, b) &= 0 \end{aligned}$$

a $u(x, 0)$ je zadána svým grafem



Zkoušková písemka M4100, 11.7.2005, 120 minut

1. Určete obecné řešení parciální diferenciální rovnice prvního řádu

$$x^2 u_x + xyu_y = u^2$$

   a potom nalezněte řešení vyhovující podmínce $u(1, y) = y$.

2. Převeďte parciální diferenciální rovnici druhého řádu

$$yu_{yy} - xu_{xy} + u_y = 0$$

   do kanonického tvaru a nalezněte její obecné řešení.

3. Řešte Cauchyho úlohu pro homogenní vlnovou rovnici

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0 \qquad\qquad x \in \mathbf{R}, \quad t \in \mathbf{R}, \\ u(x, 0) &= 2x, \\ u_t(x, 0) &= \ln(1 + x^2). \end{aligned}$$

4. Nalezněte ohraničené řešení Dirichletova problému na vnitřku kruhu

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0, \qquad\qquad x^2 + y^2 < R^2, \\ u(R\cos\phi, R\sin\phi) &= \sin^4\phi. \end{aligned}$$

5. Řešte parciální diferenciální rovnici

$$\begin{aligned} u_{xx} - u_t &= 0 \qquad\qquad x \in (0, a), \quad t \in (0, \infty) \\ u(0, t) &= 0 \\ u_x(a, t) &= 0 \end{aligned}$$

   a $u(x, 0)$ je zadána svým grafem