Jak zjistit bázi doplňku (nemusí být ortogonální)

Měli jsme dva vektorové podprostory (po úpravách - viz cvičení):

$$L_1 = [(1, 2, -1), (0, 2, 1), (0, 0, 1)]$$
$$L_2 = [(0, 2, 1), (1, 4, 0)]$$

Na cvičení jsme zjistili, že dimenze $L_1 \cap L_2$ je 2. Jakýkoliv vektor, který patří do podprostoru průniku, patří do L_1 i do L_2. Dále víme, že jakýkoliv vektor můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci bázových vektorů. Proto $u \in L_1 \cap L_2$ můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci bázových vektorů podprostoru L_1:

$$u_1 = \alpha(1, 2, -1) + \beta(0, 2, 1) + \gamma(0, 0, 1) \tag{1}$$

i jako lineární kombinaci bázových vektorů podprostoru L_2:

$$u_2 = \delta(0, 2, 1) + \omega(1, 4, 0) \tag{2}$$

Víme, že $u_1 = u_2 = u$. Můžeme proto sestavit rovnici:

$$\alpha(1, 2, -1) + \beta(0, 2, 1) + \gamma(0, 0, 1) = \delta(0, 2, 1) + \omega(1, 4, 0)$$

Z této vektorové rovnice získáme 3 různé rovnice pro jednotlivé složky:

$$\begin{aligned} &\alpha = \omega \\ &2\alpha + 2\beta = 2\delta + 4\omega \\ &-\alpha + \beta + \gamma = \delta \end{aligned}$$

Tuto soustavu je nejlepší řešit maticově (nezapomeňte převést všechny proměnné na jednu stranu):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Po úpravě na schodovitý tvar dostaneme matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Z toho vidíme řešení

$$\begin{aligned} \alpha &= \omega \\ \beta &= \delta + \omega \\ \gamma &= 0 \end{aligned}$$

Máme dva volné parametry δ, ω, při jejich různé volbě získáme dva různé bázové vektory průniku podprostorů L_1 a L_2. Můžeme zvolit libovolnou kombinaci čísel, jen nesmí vyjít všechny koeficienty nulové. Je dobré volit jeden z parametrů 0. Např.:

$$\delta = 0, \omega = 1 \rightarrow \alpha = 0, \beta = 1$$

Tyto koeficienty dosadíme do rovnic (1) nebo (2). Je jedno do které, vyjdou obě stejně (to jsme původně chtěli). Dosazením $\delta = 0$ a $\omega = 1$ zjistíme, že jeden z vektorů, tvořících bázi průniku je vektor $(1, 4, 0)$.
Volbou např. $\delta = 1, \omega = 0$ nám vyjde druhý bázový vektor $(0, 2, 1)$