1 Zadání

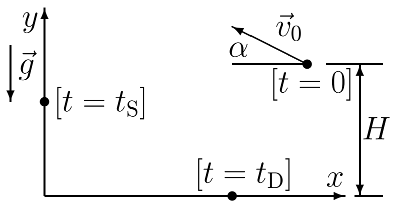
Hráč squashe odpálí míč hmotnosti m_{M} v rovině kolmé na stěnu. Předpokládejme, že známe počáteční polohu i rychlost míče. Dále uvažujme, že náraz na stěnu trvá velmi krátce a stěna pruží pouze ve vodorovném směru. Určete, kam míč dopadne. Odpor prostředí zanedbejte.

2 Postup řešení

Zvolíme souřadnicový systém, jak je uvedeno na obrázku. Neb jak počáteční rychlost, tak zrychlení leží v rovině kolmé na stěnu, pohyb bude probíhat v této rovině, tj. je dvourozměrný.

Počáteční podmínky jsou

$$\vec{x}(t=0) = \vec{x}_0 = (L, H),\ \vec{v}(t=0) = \vec{v}_0 = v_0(-\cos\alpha, \sin\alpha). \tag{1}$$



Pohyb lze rozdělit na tři části.

1. Šikmý vrh od začátku pohybu ($t = 0$) po dopad na stěnu ($t = t_{\mathrm{S}}$). Čas nárazu na stěnu určíme z podmínky, že $x-$ová souřadnice je nulová,
$$t_{\mathrm{S}}:\ x(t_{\mathrm{S}}) = 0 \to t_{\mathrm{S}} \to y(t_{\mathrm{S}}).$$
2. Náraz na stěnu a odraz. Míč dopadne s rychlostí $\vec{v}(t_{\mathrm{S}})$ a odrazí se s rychlostí $\vec{v}(t_{\mathrm{S}})'$.
3. Šikmý vrh po odrazu od stěny ($t = t_{\mathrm{S}}$) po dopad ($t = t_{\mathrm{D}}$). Čas dopadu na zem určíme z podmínky, že $y-$ová souřadnice je nulová,
$$t_{\mathrm{D}}:\ y(t_{\mathrm{D}}) = 0 \to t_{\mathrm{D}} \to x(t_{\mathrm{D}}).$$

3 Řešení

3.1 Obecně k fázím 1. a 3.

Při fázích šikmého vrhu (tj. 1. a 3.) 2. Newtonův zákon dá obecné řešení

$$m\vec{a} = \vec{F} = \vec{G} = m\vec{g} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g} = \overrightarrow{\text{konst}}. \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t,\ \vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2. \tag{2}$$

Vyjádřeno ve složkách

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t,\ y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Je-li $v_{0x} = 0$, těleso se pohybuje po přímce. Platí-li však $v_{0x} \neq 0$, můžeme vyjádřit čas t jako lineární funkci x. Dosazením do vzorce pro $y(t)$ dostaneme $y(x)$. Takto získaná funkce $y(x)$ je kvadratická, tj. pohyb je parabolický a každý bod paraboly je určen souřadnicemi $(x, y(x))$.

3.2 Fáze 1.

Obecné řešení (2) přejde, s ohledem na počáteční podmínky (1), na

$$t \in [0, t_{\mathrm{S}}]:\ \vec{v}(t) = (-v_0\cos\alpha, v_0\sin\alpha - gt),\ \vec{x}(t) = \left(L - v_0 t\cos\alpha, H + v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2\right). \tag{3}$$

Podmínka $x(t_{\mathrm{S}}) = 0$ spolu s rovnicí (6) dá čas nárazu na stěnu

$$t_{\mathrm{S}} = \frac{L}{v_0\cos\alpha},\ y(t_{\mathrm{S}}) = H + L\tan\alpha - \frac{L^2 g}{2v_0^2}\frac{1}{\cos^2\alpha}. \tag{4}$$

Požadujeme $y(t_{\mathrm{S}}) \geq 0$, aby se jednalo o dopad na stěnu. Dostáváme nerovnici, kterou rozřešíme vzhledem k $\tan\alpha$.

$$0 \leq y(t_{\mathrm{S}}) = H + L\tan\alpha - \frac{L^2 g}{2v_0^2}\frac{1}{\cos^2\alpha} = H + L\tan\alpha - \frac{L^2 g}{2v_0^2}\left(1 + \tan^2\alpha\right).$$

Kořeny jsou

$$(\tan\alpha)_{1,2} = \frac{1}{2W}\left[L \pm \sqrt{L^2 + 4W(H-W)}\right],\ W \equiv \frac{L^2 g}{2v_0^2}.$$

Nalezli jsme tedy kořeny, mezní případy, které dělí reálnou osu na tři oblasti. Zbývá určit na které / kterých z nich je $0 \leq y(t_{\mathrm{S}})$ splněno.

Podíváme-li se na výraz pro $y(t_{\mathrm{S}})$, vidíme, že pro $|\tan\alpha| \to \infty$ je $y(t_{\mathrm{S}}) < 0$. Tedy přípustné hodnoty $\tan\alpha$ jsou mezi nalezenými kořeny.

Navíc musí být výraz (v kořenech $\tan\alpha$) pod odmocninou nezáporný. Tím dostáváme další podmínku, kterou bude omezena rychlost v_0. Podobným postupem jako pro kořeny $\tan\alpha$ zjistíme

$$0 = L^2 + 4W(H-W) \Rightarrow W_{1,2} = \frac{1}{2}\left(H \pm \sqrt{H^2 + L^2}\right).$$

Pro velká $|W|$ je uvažovaný výraz záporný, tj. opět W leží mezi nalezenými kořeny. Navíc z definice je vidět, že W musí být nezáporné, takže přípustné hodnoty jsou zdola omezeny nulou a shora kladným kořenem.

$$0 \leq L^2 + 4W(H-W) \Rightarrow \frac{L^2 g}{2v_0^2} \equiv W \in \left[0, \frac{1}{2}\left(H + \sqrt{H^2 + L^2}\right)\right] \Rightarrow v_0^2 \in \left[\frac{gL^2}{H + \sqrt{H^2 + L^2}}, \infty\right).$$

Dosadíme-li dolní mez pro rychlost do výrazu pro $\tan\alpha$ (člen s odmocninou je nulový) a do $y(t_{\mathrm{S}})$, dostaneme

$$\tan\alpha = \frac{L}{H + \sqrt{H^2 + L^2}},\ y(t_{\mathrm{S}}) = 0.$$

Skutečně se jedná o mezní situaci, dopad právě do dolního rohu stěny.

3.3 Fáze 2.

Na míč při srážce se stěnou působí tyto síly - tíhová, reakce stěny a síla třecí.

Srážku považujeme za velmi krátkou, takže lze zanedbat změnu pohybového stavu působením tíhové síly a případné otáčivé účinky síly třecí.

Při srážce, ať už pružné či nepružné platí zákon zachování hybnosti (ZZH). Obecně míč předá část své hybnosti stěně.

Protože stěna pruží jen ve vodorovném směru, plyne z toho, že $y-$ová hybnost míče se nezmění. V $x-$ovém směru složka rychlosti změní znaménko (bude kladná) a obecně i velikost. ZZH tedy nabude tvaru

$$
\begin{aligned}
m_{\mathrm{M}}\vec{v}(t_{\mathrm{S}}) + \vec{0} &= m_{\mathrm{M}}\vec{v}(t_{\mathrm{S}}) + m_{\mathrm{S}}\vec{v}_{\mathrm{S}}, \\
m_{\mathrm{M}}\left(v_x(t_{\mathrm{S}}), v_y(t_{\mathrm{S}})\right) &= \left(m_{\mathrm{M}}v_x(t_{\mathrm{S}})' + m_{\mathrm{S}}v_{x\mathrm{S}}, m_{\mathrm{M}}v_y(t_{\mathrm{S}})'\right)
\end{aligned}
$$

Lze tedy psát

$$
v_x(t_{\mathrm{S}})' = v_x(t_{\mathrm{S}}) - \frac{m_{\mathrm{S}}}{m_{\mathrm{M}}}v_{x\mathrm{S}} \equiv -Qv_x(t_{\mathrm{S}}) = Qv_0\cos\alpha, \quad v_y(t_{\mathrm{S}})' = v_y(t_{\mathrm{S}}) = v_0\sin\alpha - \frac{gL}{v_0\cos\alpha}, \quad (5)
$$

kde jsme zavedli parametr $Q \geq 0$.

Přesněji budeme uvažovat $Q \in \{-1\} \cup [0,1]$. Hodnota $Q = -1$ odpovídá v rovnici (5) rovnosti $v_x(t_{\mathrm{S}})' = v_x(t_{\mathrm{S}})$, tj. k odrazu nedošlo. Hodnota $Q \geq 1$ by odpovídala tomu, že stěna míč odrazí a ještě urychlí. V principu by to bylo možné, pokud by míč dopadl na stěnu již kmitající (díky předchozím nárazům míče) ve vhodný okamžik.

3.4 Fáze 3.

Počátečním časem tohoto vrhu je čas t_{S}, k němu se vztahují také počáteční vektory polohy a rychlosti. V obecném řešení (2) by jsme tedy měli psát $t - t_{\mathrm{S}}$. Pro zestručnění zápisu zavedeme novou, posunutou, časovou souřadnici $t'(t) = t' \equiv t - t_{\mathrm{S}}$. Pak (2) vede na

$$
t' \in [0, t'_{\mathrm{D}}]: \ \vec{v}(t) = \left(-Qv_x(t_{\mathrm{S}}), v_y(t_{\mathrm{S}}) - gt'\right), \ \vec{x}(t) = \left(-Qv_x(t_{\mathrm{S}})t', y(t_{\mathrm{S}}) + v_y(t_{\mathrm{S}})t' - \frac{1}{2}gt'^{\,2}\right). \quad (6)
$$

Nalezneme t'_{D} z podmínky $y(t_{\mathrm{D}}) = 0$. Přirozeně nás zajímá pouze kladný kořen.

$$
\begin{aligned}
(t'_{\mathrm{D}})_{1,2} &= \frac{1}{g}\left[-\frac{gL}{v_0\cos\alpha} + v_0\sin\alpha \pm \sqrt{(v_0\sin\alpha)^2 + 2gH}\right], && (7) \\
x(t'_{\mathrm{D}}) &= \frac{Qv_0\cos\alpha}{g}\left[-\frac{gL}{v_0\cos\alpha} + v_0\sin\alpha \pm \sqrt{(v_0\sin\alpha)^2 + 2Hg}\right] && (8)
\end{aligned}
$$

4 Testy výsledku - limitní případy

- $Q = 0$: po nárazu na stěnu se míč pohybuje pouze svisle, tj. dopadne do dolního rohu stěny, tj. $x = 0$.

  Vzorec (8) skutečně dá $x(t_{\mathrm{D}})|_{Q=0} = 0$.

- $v_0\cos\alpha = 0$: svislý vrh (případně i s nulovou rychlostí, je-li uvažovaný limitní případ realizován $v_0 = 0$); míč dopadne ve stejné vzdálenosti od stěny jako byl vržen, tj. $x = L$.

  Vzorec (8) dá $x(t_{\mathrm{D}})|_{v_0\cos\alpha=0} = -QL$. Neboť k nárazu na stěnu nedojde, má smysl pouze hodnota $Q = -1$.

- $g = \infty$: těleso ihned spadne, tj. opět $x = L$.

  Úpravy i výsledek jsou stejné jako v předchozím případě ($v_0\cos\alpha = 0$).

- $g = 0$: míč nepadá, tj. na zem by mělo dopadnout pouze v případě, že byl vypálen směrem dolů, což odpovídá $\alpha \in (-\pi, 0)$. Pro jiné hodnoty úhlu α by mělo platit, že t'_{D} bude nekonečný anebo záporný. Vyšetříme tedy vrh ne–dolů, tj. $\alpha \in [0, \pi]$.

  – *$\alpha \in \{0, \pi\}$:* vodorovný pohyb, uvažujeme pouze $H \neq 0$ (opačný případ by znamenal, že míč se již nachází na zemi).

$$
\alpha \in \{0, \pi\}: \ |t'_{\mathrm{D}}| = \left|-\frac{L}{v_0\cos\alpha} \pm \sqrt{\frac{2H}{g}}\right| = \infty \Rightarrow |x(t'_{\mathrm{D}})| = \infty.
$$

  – *Ostatní hodnoty α vrhu ne–dolů (krom $\alpha \in \{0, \pi/2, \pi\}$):* Pro provedení limity $g \to 0$ je třeba (Taylorovým rozvojem) upravit výraz typu

$$
\frac{U \pm \sqrt{U^2 + 2gH}}{g} = \frac{U}{g}\left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{2gH}{U^2}}\right] = \frac{U(1 \pm 1)}{g} \pm \frac{H}{U} + \mathcal{O}(g),
$$

  kde $\mathcal{O}(g)$ značí členy obsahující alespoň prvou mocninu g, v limitě vypadnou. Zkratce U ve vzorci (8) odpovídá $v_0\sin\alpha$.

  Pro volbu znaménka "+" dá limita nekonečno. Musíme tedy zvolit "$-$" a zjistit zda skutečně dostaneme $t'_{\mathrm{D}} > 0$. Bližší vyšetřování limity vede k tomu, že se nechová zcela dle očekávání.

  Je možné, že úpravy provedené při výpočtu (např. dělení g a implicitní předpoklady) neumožňují v tomto případě obdržet správnou limitu.

- $L = 0$: pohyb začíná odrazem od stěny, tj. fáze 1 nenastane.

- $Q = -1$: obecně odpovídá obyčejnému šikmému vrhu beze stěny, je tedy možné dosáhnout záporných hodnot souřadnice x. Skutečně, pro $Q = -1$ a $t'_{\mathrm{D}} >$ obdržíme $x(t'_{\mathrm{D}}) < 0$.

5 Zobecnění

Co kdyby hráč neodpálil míč v rovině kolmé na stěnu?

Přibude pohyb v ose z (kolmá k rovině obrázku), vektor počáteční rychlosti nyní bude

$$
\vec{v}_0 = \left(-v_0\cos\alpha, v_0\sin\alpha, v_{0z}\right).
$$

V ose z míč nezrychluje, ani v tomto směru nepruží stěna, takže v_z zůstává po celou dobu pohybu konstantní, pohyb je rovnoměrný.

Pohyb podél osy z v daném přiblížení neovlivňuje pohyb v ostatních osách a naopak. Na předchozích výsledcích se tedy nic nezmění.

Zvolíme-li počátek souřadnicového systému tak, že $z(t = 0) = 0$, pak při dopadu bude $z(t_{\mathrm{D}}) = v_z t_{\mathrm{D}}$.