# 1 Matematika

## 1.1 Derivace

Derivace = pravidlo, které funkci přiřadí (obecně jinou) fci.

$$\frac{d}{dx} : f(x) \mapsto \frac{df(x)}{dx} := \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(x+\epsilon)-f(x)}{(x+\epsilon)-x} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(x+\epsilon)-f(x)}{\epsilon}. \tag{1}$$

Například pro fci. $x^n$, $n \in \mathbb{N}$ (přirozené číslo). Užitím binomické věty dostaneme

$$(x+\epsilon)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}\epsilon^k = x^n + nx^{n-1}\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2),$$

kde $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ označuje členy obsahující $\epsilon$ přinejmenším v druhé mocnině včetně. Např. pro $n = 3$ máme

$$(x+\epsilon)^3 = x^3 + 3x^2\epsilon + 3x\epsilon^2 + \epsilon^3 = x^3 + 3x^2\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

$$\begin{aligned} \frac{dx^n}{dx} &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{(x+\epsilon)^n - x^n}{\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon}[x^n + n\epsilon x^{n-1} + \mathcal{O}(\epsilon^2) - x^n] = nx^{n-1} + \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\mathcal{O}(\epsilon^2), \\ \frac{dx^n}{dx} &= nx^{n-1} + \lim_{\epsilon\to 0} \mathcal{O}(\epsilon) = nx^{n-1} + 0 = nx^{n-1}. \end{aligned} \tag{2}$$

Protože derivace fce. je opět nějaká fce, můžeme ji opět derivovat, dostáváme derivace vyšších řádů označované "mocninným" indexem

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df(x)}{dx}\right), \ldots, \frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}}\right).$$

## 1.2 Integrace

Hrubě řečeno, (neurčitý) integrál je pravidlo, které fci. přiřadí fci, ale dělá to přesně opačně než derivace.

$$"\int dx" : f(x) \mapsto \int dx\, f(x)\,;\ f(x) = \frac{dg(x)}{dx} \Rightarrow \int dx\, f(x) = g(x) + \text{konst.} \tag{3}$$

Derivování je proces, při němž šipka mezi rovnicemi směřuje obráceně (tedy $\Leftarrow$). Konstanta očividně vypadne a dostaneme rovnici, s níž jsme začali. Je tedy vidět, že integrál z funkce není určen jednoznačně!

Prakticky to znamená: Integruješ-li fci. $f(x)$ podle $x$, najdi fci. $g(x)$ takovou, že derivace $g(x)$ dá právě fci. $f(x)$. Fce. $g(x)$ je hledaný výsledek. Takže pro známou fci. $x^n$ dostaneme:

$$\int dx\, x^n,\ \frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n \Rightarrow \int dx\, x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \text{konst.} \tag{4}$$

Zkusíme-li dvakrát zintegrovat konstantu $a$, s užitím rce. (4) dostaneme

$$\int dx\, a = ax + b, \int dx \int dx\, a = \int dx\, [ax + b] = \frac{1}{2}ax^2 + bx + c, \tag{5}$$

kde $b$ a $c$ jsou integrační konstanty.

## 1.3 To samé s vektory

Poznámka: Vektory derivujeme (/integrujeme) a derivujeme tak, že derivujeme (/integrujeme) každou složku zvlášť, tj. pro vektor $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dostáváme

$$\frac{d\vec{v}(x)}{dx} = \left(\frac{dv_1(x)}{dx}, \frac{dv_2(x)}{dx}, \cdots\right);\ \int dx\, \vec{v}(x) = \left(\int dx\, v_1(x), \int dx\, v_2(x), \cdots\right) \tag{6}$$



# 2 Trocha kinematiky a dynamiky

## 2.1 Kinematika

Popisuje pohyb: Zvolíme souřadnicový systém a sledujeme změnu jednotlivých souřadnic v čase. Souřadnicovým systémem nejčastěji bývá kartézský (KSS) /pravoúhlý. Máme tři vektory - poloha $\vec{r}$, rychlost $\vec{v}$, zrychlení $\vec{a}$ - s následujícím významem:

- $\vec{r}\,[m]$ - polohový vektor objektu, na čase závislý vektor $\vec{r}(t)$.
- $\vec{v}\,[ms^{-1}]$ - rychlost tělesa, změna polohy za čas
  průměrná rychlost na intervalu $I = [t, t+\tau]$ :

  $$< \vec{v} >_I = \frac{\vec{r}(t+\tau) - \vec{r}(\tau)}{\tau}$$

  okamžitá rychlost - "průměrná rychlost za nulový interval":

  $$\vec{v}(t) = \lim_{\tau\to 0} \frac{\vec{r}(t+\tau) - \vec{r}(\tau)}{\tau} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt},$$

  časová derivace polohového vektoru.
- $\vec{a}\,[ms^{-2}]$ - zrychlení tělesa, změna rychlosti za čas

Derivováním dle času: $\vec{r} \to \vec{v} \to \vec{a}$. Integrováním dle času: $\vec{a} \to \vec{v} \to \vec{r}$.

## 2.2 Dynamika - pohybové rce.

Dynamika zkoumá příčiny pohybu: Změny se dějí vzájemnou interakcí. Interakci v klasické mechanice popisujeme vektorovou veličinou síla $\vec{F}$. Síla závisí na charaktristikách interagujících objektů (hmotnost, elektrický náboj, intenzita elektromagnetického pole) a jejich vzájemné konfiguraci.

Platí pohybové rce, též 2. Newtonův zákon (2.NZ), jež lze psát ve tvaru:

$$m\vec{a} = \vec{F}(\{\text{parametry}\}) \tag{7}$$

Zajímá-li nás pohyb tělesa pod vlivem nějaké síly $\vec{F}$, stačí tuto rovnici dvakrát zintegrovat podle času a dostaneme:

$$\vec{r}(t) = \left(\int dt \int dt\, \frac{1}{m}\vec{F}\right) + \vec{u}_0 t + \vec{r}_0. \tag{8}$$

Integrační konstanty $\vec{u}_0$ a $\vec{r}_0$ jsme vypsali zvlášť (srovnej s rcí. (5) v případě konstantní síly).

## 2.3 Strategie řešení v mechanice

Vyjít z pohybových rovnic! Ale jakým směrem, tj. jak je upravit?

1. Přímé řešení 2.NZ, tj. nalezení $\vec{r}(t)$.
2. Pro tzv. konzervativní síly existuje veličina potenciální energie $E_{\mathrm{POT}}$. Je-li silové působení na těleso konzervativní, manipulací s pohybovými rcemi. lze ukázat, že se zachovává veličina celková mechanická energie a dostáváme ZZME (Zákon Zachování Mechanické Energie)

   $$\frac{1}{2}mv^2 + E_{\mathrm{POT.}} = \text{konst.} \tag{9}$$

   Problematika zachovávajících se veličin je dobře popsána tzv. variačním počtem, blíže viz. teorémy Emy Nötherové.

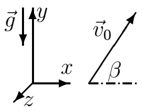
# 3 Takový pěkný příklad

V homogenním gravitačním poli $\vec{g}$ je vrženo těleso hmotnosti $m$ s počáteční rychlostí velikosti $v_0$ svírající úhel $\beta$ s vodorovným směrem. Určete jak nejvýše vystoupí, pohybuje-li se v bezodporovém prostředí.

## 3.1 Rozmýšlení

Zvolíme KSS: Osa $x$ vodorovná, osa $y$ svisle míří proti vektoru $\vec{g}$, osa $z$ vodorovná kolmá na předchozí. Počátek umístíme tak, aby se v něm v čase $t = 0$ těleso nacházelo. Osy $x$ a $z$ orientujeme tak, aby vektor počáteční rychlosti ležel v rovině $xy$.

Obrázek 1: Šikmý vrh




Úhel $\beta$ orientujeme kladně od osy $x$ směrem k ose $y$ (na **Obrázku 1** je úhel $\beta$ kladný)

1. $\beta = 0$; $\pi$ - vodorovný vrh.
2. $\beta \in (0, \pi)$ - šikmý vrh, těleso může stoupat.
3. $\beta \in (\pi, 2\pi)$ - šikmý vrh dolů, těleso nestoupá.

V dalším uvažujeme pouze případ 2.

## 3.2 Řešení 1 - Pohybové rce.

Vyjádříme závislost polohového vektoru na čase, obzvláště $y(t)$, nalezneme čas $t_M$ dosažení maximální výšky $y_M$ a spočteme $y_M = y(t_M)$.

Na těleso působí síla $\vec{F} = m\vec{g} = (0, -mg, 0)$, která je konstantní, takže můžeme přímo a snadno integrovat zrychlení až k polohovému vektoru podle rovnic (5) a (8). Dostaneme obecné řešení

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{u}_0 t + \vec{r}_0. \tag{10}$$

My jsme ale zvolili souřadnicový systém KSS tak, že v čase $t = 0$ je těleso v jeho počátku. Aplikujeme tuto počáteční podmínku spolu se zadáním, kde máme určenu/dánu rychlost v tomtéž čase

$$\vec{r}(t=0) = \vec{0},\ \vec{v}(t=0) = \vec{v}_0 = (v_0\cos(\beta),\ v_0\sin(\beta),\ 0)\ \&\ (10) \Rightarrow\ \vec{r}(t) = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{v}_0 t.$$

V jednotlivých složkách máme

$$x(t) = v_0\cos(\beta)t\,;\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin(\beta)t\,;\ z(t) = 0. \tag{11}$$

Dosadíme-li do $y(t)$ za $t$ z rovnice pro $x$-ovou složku, vidíme, že trajektorií je parabola v rovině $xy$ obrácená "dnem" vzhůru.

V bodě maximálního výstupu je maximální souřadnice $y(t)$, matematicky lze nutnou (nikoli postačující) podmínku pro extrém fce. $y(t)$ v čase $t_M$ zapsat jako nulovost derivace v daném čase.



Z fyzikálního náhledu je zřejmé, že v čase $t_M$ je nulová $y$-ová složka rychlosti, tj. dostáváme stejnou podmínku jako z přístupu extrémní hodnoty fce. $y(t)$,

$$0 = \left(\frac{dy}{dt}\right)(t = t_M) = -gt_M + v_0\sin(\beta).$$

Odtud

$$t_M = \frac{v_0\sin(\beta)}{g},\ y_M = y(t_M) = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2(\beta).$$

Další možností je vyjít z fce. $y(t)$ - hledat vrchol paraboly bez derivací:

$$y(t) = -\frac{1}{2}g\left(t - \frac{v_0}{g}\sin(\beta)\right)^2 + \frac{v_0^2}{2g}\sin^2(\beta).$$

První člen je nekladný a hodnota $y(t)$ je maximální, když je tento člen nulový, což odpovídá času $t_M = v_0\sin(\beta)/g$, takže

$$y_M = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2(\beta).$$

## 3.3 Řešení 2 - Zákony Zachování

Použijeme ZZME - srovnáváme stavy v časech $t = 0$ a $t_M$.

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mg0 = \frac{1}{2}mv^2(t_M) + mgy_M \Rightarrow y_M = \frac{1}{2g}[v_0^2 - v^2(t_M)]\ \&\ \vec{v}(t_M) = (v_0\cos(\beta), 0, 0), \tag{12}$$

$$y_M = \frac{1}{2g}v_0^2[1 - \cos^2(\beta)] = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2(\beta), \tag{13}$$

kde jsme užili konstantnosti $x$-ové a $z$-ové složky rychlosti (která vyplývá z nulovosti zrychlení v těchto směrech).

*Poznámka*: Předpokládali jsme znalost nulovosti $y$-ové složky rychlosti v čase $t_M$. Lze však získat přímo - hledáme extrém funkce $y(t)$, o němž víme, že nastane (v zatím neurčeném) čase $t_M$, což přímo dá podmínku $0 = \frac{dy(t_M)}{dt}$, nebo také dosazením z rovnice (12) do derivační podmínky

$$0 = \frac{dy(t_M)}{dt} = \{(12)\} = -\frac{1}{2g}2\vec{v}(t_M)\vec{a}(t_M) = -\frac{1}{g}\vec{v}(t_M)\vec{g} = \frac{1}{g}v_y(t_M)g = v_y(t_M).$$

## 3.4 (Vy)řešení

Těleso dosáhne maximální výšky $y_M$ v čase $t_M$, které jsou dány v následující rci.

$$t_M = \frac{v_0\sin(\beta)}{g},\ y_M = y(t_M) = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2(\beta). \tag{14}$$

Povšimněme si, že výsledek je platný pro všechny tři možnosti hodnot úhlu $\beta$

1. $\beta = 0$ anebo $\beta = \pi\ \Rightarrow t_M = y_M = 0$.
2. $\beta \in (0, \pi)$ - platí rce. (14) v obecném tvaru.
3. $\beta \in (\pi, 2\pi)$ - rce. (14) dává $t_M \leq 0$, takže interpretujeme hodnotu $y_M$ jako výšku, z jaké musí vodorovně vržené těleso s počáteční rychlostí $\vec{v}(t_M) = v_0\cos(\beta)\,(1,\ 0,\ 0)$ v čase $t_M$ začít padat, aby se v čase $t = 0$ nacházelo v počátku KSS s rychlostí velikosti $v_0$.

## 3.5 Závěrem

Poněkud pracnější vyřešení přes pohybové rce. nám umožnilo nalézt čas $t_M$, čímž se ozřejmila nutnost diskuse hodnot úhlu $\beta$, který by z jednoduššího řešení pomocí ZZME nevyšel.