1 Zadání

Součástí řešení je kromě výsledku také čitelný obrázek s označením, popřípadě vysvětlení úvahy, které bylo užito při řešení.

1.1 Mechanika

1. Ve zvoleném souřadnicovém systému jsou zadány síly působící na hmotný bod nenulové hmotnosti.

$$\vec{F}_1 = (d, -b, c),\ \vec{F}_2 = (|d|, b, -c), \tag{1}$$

   kde d, b a c jsou konstanty. $|d|$ značí absolutní hodnotu z čísla d.

   Naorientujte sílu $\vec{F}_3$ dané velikosti ($F_3 > 0$) tak, aby zrychlení hmotného bodu bylo minimální. Tj. určete složky síly $\vec{F}_3$. Diskutujte různé hodnoty čísla d.

2. V bezodporovém prostředí s homogenním gravitačním polem $\vec{g}$ se pohybuje těleso. Bylo-li v čase $t = 0$ vystřeleno rychlostí o velikosti v_0 svírající úhel β s vektorem $\vec{g}$, o nejvýše kolik se může kladně změnit souřadnice orientovaná proti směru $\vec{g}$? Tj. jak nejvýše může těleso vystoupit? Uvažte všechny (neekvivalentní) hodnoty úhlu β.

3. V (jinak) bezodporovém prostředí klouže těleso po podložce rovnoběžné s homogenním gravitačním zrychlením $\vec{g}$. Je-li koeficient tření f, určete třecí sílu působící na těleso (v důsledku pohybu po podložce) a výsledné zrychlení tělesa o hmotnosti m.

4. Na nakloněné rovině (v homogenním gravitačním poli) se nachází hmotné těleso. Označme koeficient statického tření f_S (tj. koef. tření, když se styčné plochy vůči sobě nepohybují). Budeme-li rovinu stále více naklánět (vzhledem ke svislému směru, jenž jest dán grav. polem), jaká je mezní hodnota úhlu náklonu, při němž se těleso ještě nezačne pohybovat?

5. Po nakloněné rovině se kutálí (bez podkluzování) homogenní těleso (válec nebo koule). Určete velikost rychlosti posuvu těžiště, poklesne-li těleso z výšky h_0 do výšky h, přičemž ve výšce h_0 byl volně puštěn. Hmotnost tělesa označme m a moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení je $J = bmR^2$, kde b je číselný faktor ($b_{\text{VÁLEC}} = 1/2$, $b_{\text{KOULE}} = 2/5$) a R je (maximální) poloměr kruhového průřezu tělesa kolmého k ose otáčení. Odpor prostředí zanedbejte.

6. V bezodporovém prostředí se v rovině pohybují volné hmotné částice m_1, m_2 kolmými rychlostmi $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$, které se nepružně srazí a pokračují dále jako celek. Užitím zákonů zachování odvoďte jaký musí být poměr velikostí rychlostí, aby rychlost $\vec{v}$ spojená částice svírala s rychlostí $\vec{v}_1$ úhel β.

7. Na povrchu koule hmotnosti M, poloměru R, máme tělísko hmotnosti m. Jakou nejmenší velikost rychlosti musíme tělísku udělit, aby se dostalo z gravitačního pole koule? Tj. určete únikovou rychlost tělíska z gravitačního pole tělesa M. Předpokládejme, že těleso M je pevně drženo v počátku souřadnic.

8. Hmotný bod m je zavěšen na nehmotném tuhém závěsu délky l v homogenním gravitačním poli $\vec{g}$ (určujícím svislý směr). Závěs se kolem svislé osy, procházející bodem jeho upevnění, otáčí úhlovou rychlostí ω (tj. hmotný bod se také otáčí touže úhlovou rychlostí). Určete velikost tahové síly $\vec{T}$, jíž závěs působí na hmotný bod, víte-li, že (v inerciální vztažné soustavě) je výsledné zrychlení dostředivé. Určete také úhel vychýlení závěsu od svislého směru.

9. V homogenním gravitačním poli je na nehmotném závěsu délky l upevněno tělísko hmotnosti m, které je drženo vychýlené o úhel ϕ z rovnovážné polohy (tedy se nachází ve výšce $h = l[1 - \cos(\phi)]$ oproti rovnovážné poloze). Tělísko volně pustíme, zhoupne se a při průchodu rovnovážnou polohou narazí do tělesa hmotnosti M spočívajícího na podložce, po níž se může pohybovat bez tření. Těleso M je takto uvedeno do pohybu a tělísko m se odrazí. Za předpokladu, že můžeme odraz tělíska m zanedbat, určete rychlost, s níž se bude těleso M pohybovat. Srážku považujte za nepružnou.

10. Těleso bylo (v čase $t = 0$) volně puštěno v homogenním gravitačním poli v odporovém prostředí. Zakreslete všechny působící síly, porovnejte jejich velikosti a zdůrazněte výslednici, pohybuje-li se těleso

    (a) Zrychleně (po volném puštění).
    (b) Rovnoměrně přímočaře (v pozdějších časech).

Dále určete časovou závislost vektoru rychlosti.

11. Je zadán polohový vektor tělesa v závislosti na čase $\vec{r}(t)$ ve zvoleném kartézském souřadnicovém systému. Určete (v témž souřadnicovém systému) vektor rychlosti a velikost zrychlení v čase $t = 0$, je-li

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)). \tag{2}$$

Poznámka: jednoduché volby časové závislosti (goniometrické, exponencielní, polynomiální fce, jednoduchý součin "lehkých" fcí), možno požadovat výsledek v obecném čase, nebo také jiné veličiny (viz. příklad (12)).

12. Těleso hmotnosti m se pohybuje po trajektorií, která je zadána závislostí polohového vektoru na čase. Určete moment hybnosti tělesa, je-li:

$$\vec{r}_1(t) = R(\cos(\omega t), \sin(\omega t), 0),$$

pohyb po kružnici.

$$\vec{r}_2(t) = (0, v_0 \cos(\beta)t, v_0 \sin(\beta)t - gt^2/2),$$

šikmý vrh v rovině yz.

13. Určete moment (celkové) síly působící na těleso hmotnosti m, jehož polohový vektor je (ve zvoleném pravoúhlém souřadnicovém systému) dán jako

$$\vec{r} = (R\cos(\omega t), R\sin(\omega t), -gt^2/2),$$

kde $R, g \geq 0$, ω jsou konstanty.

Nápověda: Určete sílu z pohybové rce.

14. Určete vzdálenost, jakou urazí těleso během intervalu $t \in [0, 1]0$, jehož polohový vektor má následující závislost na čase

$$\vec{r} = (R\cos(2\pi t), R\sin(2\pi t), z_0),$$

1.2 Kmity, vlnění

1. Napište řešení pro výchylku $u(x, t)$ monochromatické rovinné vlny běžící zprava doleva - rovnoběžně s přímkou osy x (kolmo na souřadnice y, z) ve zvoleném souřadnicovém systému - s vlnovou délkou λ, frekvencí f a amplitudou A, je-li v čase $t = 0$ výchylka bodu o klidové souřadnici $x = 0$ dána $u(x = 0, t = 0) = A\cos(\phi_0)$.

2. Stojaté kmitání vznikne složením dvou kmitů stejné amplitudy i frekvence, ovšem s opačnými směry šíření, tj.

$$u_1 = A\cos(kx - \omega t + \phi_1),\ u_2 = A\cos(kx + \omega t + \phi_2) \Rightarrow u = u_1 + u_2,$$
$$u(x, t) = 2A\cos(kx + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2})\cos(\omega t - \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}).$$

Jaká je fázová rychlost stojatého kmitání?

3. Hmotné těleso m je svisle zavěšeno v homogenním silovém poli $\vec{g}$ na pružině tuhosti k. V čase $t = 0$

   - jej (svisle/podél směru $\vec{g}$) vychýlíme o délku x_0 a volně pustíme.
   - mu svisle udělíme rychlost velikosti v_0.

   Určete rovnovážné protažení pružiny z klidové délky (nezatížené pružiny), tj. určete rovnovážnou polohu tělesa. Napište pohybovou rci. pro výchylku $u(t)$ z rovnovážné polohy; z ní (popřípadě s pomocí dalších obecně platných zákonitostí) a aplikací těchto počátečních podmínek na obecný tvar výchylky harmonického kmitání $u = A\cos(\omega t + \phi)$ určete všechny konstanty objevující se v uvedeném vzorci pro výchylku $u(t)$ pomocí zadaných veličin.

   (Jakou výchylku a kdy by jsme ji museli tělesu udělit, abychom dostali totéž kmitání jako při udělení rychlosti v_0?)

4. Definujeme-li střední časovou hodnotu za periodu jako:

$$\overline{x(t)} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt\ (\bar{1} = 1),$$

spočtěte střední hodnotu kvadrátu výchylky $u(t) = A\sin(\omega t)$, tj. až na konstantu střední hodnotu potenciální energie napjaté pružiny.

Nápověda: $\cos^2(x) = [1 + \cos(2x)]/2$.

1.3 Elektřina

1. Elektrický dipól je dvojice nábojů $+q$ a $-q$ ve vzájemné vzdálenosti d. Lze si ho představit jako tuhou tyčinku s nabitými konci. Je-li dipól v elektrostatickém poli intenzity $\vec{E}$, na náboje působí síly a dipól se orentuje v elektrickém poli tak, aby jeho energie byla minimální (-pomocí této představy lze popsat dielektrické látky). Energii dipólu lze psát jako
$$E_{\mathrm{POT}} = -\vec{p}\vec{E};\ \vec{p} = +q\vec{r}_{+q} - q\vec{r}_{-q} = q\vec{d}, \tag{3}$$
kde $\vec{d}$ směřuje od záporného náboje ke kladnému. Určete, kdy je energie dipólu minimální v závislosti na orientaci dipólového momentu $\vec{p}$ v poli $\vec{E}$, o kterém budeme předpokládat, že je homogenní (tj. $\vec{E}$ je konstantní vektor).

2. Na Obrázku 1. je znázorněno rozložení nábojů - každý následující náboj je od předcházejícího vzdálen o délku d, řada pokračuje do nekonečna. Náboje střídají znaménka podle obrázku. Určete intenzitu elektrického pole v místě, které je od prvního náboje vzdáleno o d, viz. uvedený obrázek.

Obrázek 1: Náboje na přímce

$$|\vec{E}| = ? \quad +q \quad -\frac{4q}{2} \quad +\frac{9q}{4} \quad -\frac{16q}{8} \quad +\frac{25q}{16} \quad \cdots$$

3. V laboratoři na Zemi chceme udržet nabitou částici (hmotnost m a náboj q) v konstantní výšce v deskovém kondenzátoru, který dává homogenní elektrické pole intenzity $\vec{E}$. Určete s jakou minimální intenzitou se nám to může podařit.

4. Mějme homogenní (tj. konstantní) elektrostatické pole $\vec{E}$ a v něm nabitou částici q. Jakou práci je třeba vykonat, aby jsme ji rovnoměrným pohybem přemístili z bodu $\vec{r}_1$ do bodu $\vec{r}_2$?

5. Ve vakuu je v počátku souřadnic pevně držena nabitá částice $Q > 0$, hmotnost M. Ze vzdálenosti d na ni rychlostí velikosti v vystřelíme jinou nabitou částici o náboji q, hmotnosti m. V závislosti na hodnotě náboje q (při ostatních parametrech fixovaných) jaké je maximální možné přiblížení, předpokládáme-li že částice spolu interagují pouze elektrostaticky (Coulombovsky) a gravitačně?

6. Na obrázku je znázorněn elektrický obvod. Je-li
$$\mathcal{E}_1 \geq \mathcal{E}_2;\ R_1 = aR,\ R_2 = bR,\ R_3 = cR,$$
určete
   - celkový proud (velikost i směr), který jím protéká
   - V jakém poměru je napětí na odporu R_1 k napětí na odporu R_2, tj $U_1 : U_2 = ?$
   - Napětí na odporu R_2.
   - Jednoduchoučké:
     1) V jakém poměru se celkový proud a celkové napětí rozdělí do větví s odpory R_2 a R_3?
     2) V jakém poměru bude napětí na odporu R_2 k napětí na odporu R_3?

   Poznámka ke znaménkové konvenci: Chápejte směr proudu daný pohybem částic s kladným nábojem!

7. Uvažujme kružnici poloměru r se středem v počátku zvolené pravoúhlé soustavy souřadnic. Do této kružnice vepíšeme pravidelný $2n$-úhelník, jehož vrcholy leží na kružnici a i-tý vrchol nese náboj Q_i.

   Určete potenciál ϕ a vektor elektrické intenzity $\vec{E}$ ve středu kružnice, je-li

   (a) $Q_i = Q\ \forall i = 1 \cdots 2n$, tj. všechny náboje stejné.
   (b) $Q_i = Q_{i+n},\ Q_{i+1} = -Q_i\ \forall i = 1 \cdots n-1$, tj. protilehlé náboje stejné a sousední se liší znaménkem.

   Při výpočtu potenciálu klaďte potenciál v nekonečné vzdálenosti od zdroje za nulový.

8. Uvažujme dvě stejné hmotné nabité částice ve vakuu v polohách $\vec{x}_i$, $i = 1; 2$. Určete výslednou sílu jakou na sebe působí, pro konkrétnost sílu $\vec{F}_{2\to 1}$, sílu, jíž částice 2 působí na částici 1.

   Konkrétně pro elektron e^- a proton p^+. Je výsledná síla přítažlivá nebo odpudivá? Jaký by musel být poměr qm^{-1} pro danou částici, aby se příspěvky gravitační a elektrostatické interakce vyrušily?

Obrázek 2: Obvod 3