Zkratky: fce. = funkce; rce. = rovnice; ":=" je definiční rovnítko; "≡" znamená ekvivalenci.

1 Pár poznámek k derivacím

1.1 Definice

Derivace = pravidlo, které funkci přiřadí (obecně jinou) fci.

$$\frac{d}{dx} : f(x) \mapsto \frac{df(x)}{dx} := \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(x+\epsilon)-f(x)}{(x+\epsilon)-x} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(x+\epsilon)-f(x)}{\epsilon}. \tag{1}$$

1.2 Geometrická interpretace derivace

Vyjdeme z grafu fce. jedné proměnné.

Body $(x_1, f(x_1))$ a $(x_2, f(x_2))$ v rovině grafu fce. f určují přímku - spojnici těchto bodů. Tato přímka je obecně sečnou grafu fce. f a (jako každá přímka) má rovnici tvaru $y = kx + a$, kde směrnici k a "posunutí" a lze zjistit z podmínky, že uvedené body $(x_j, f(x_j))$, $j = 1, 2$, na přímce leží. To jest máme dole uvedené rovnice, které dají výsledek:

$$f(x_j) = kx_j + a\,;\; j = 1, 2 \tag{2}$$

$$y = kx + a\,;\; k = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1 - x_2},\; a = f(x_2) - kx_2. \tag{3}$$

Budeme-li se s bodem x_2 blížit k bodu x_1, sečna bude graf fce. f sekat stále méně, až se stane tečnou - v bodě $x_1 = x_2$ se grafu pouze dotýká! Pro směrnici této tečny dostaneme z rce. (3) následující:

$$k = \lim_{x_2\to x_1} \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \left(\frac{df}{dx}\right)(x_1) = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_1} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_1} = f'(x_1), \tag{4}$$

kde jsme použili několik obvyklých zápisů pro to, že jsme derivaci fce. f (jež je opět - byť obecně jinou - fcí. proměnné x) vyčíslili v bodě x_1.

Derivace fce. f v bodě x určuje směrnici tečny ke grafu dané fce. v bodě x.

1.3 Několik příkladů

V následujícím nebudeme pro stručnost zápisu limitu $\lim_{\epsilon\to 0}$ vypisovat a v potřebné fázi úpravy ji vyznačíme pouze šipkou $\to$.

1. Napřed si ukážeme obecnější věc týkající se lineární transformace proměnné, tj. $x \to ax + b\,;\; a \neq 0$. Počítejme

$$\frac{df(ax+b)}{dx} := \frac{f(a[x+\epsilon]+b) - f(ax+b)}{(x+\epsilon)-x} = \frac{1}{\epsilon}[f(ax+b+a\epsilon) - f(ax+b)].$$

Nás zajímá limita $\epsilon \to 0$ z uvedeného výrazu. Jde-li ϵ k nule, pak i $a\epsilon$. Tedy zavedeme nový parametr $\delta = a\epsilon$, díky čemuž se upravovaný výraz přiblíží tvaru v (1).

$$\frac{df(ax+b)}{dx} = \frac{a}{a}\frac{1}{\epsilon}[f(ax+b+a\epsilon) - f(ax+b)] = a\frac{1}{a\epsilon}[f(ax+b+a\epsilon) - f(ax+b)] =$$
$$a\frac{1}{\delta}[f(ax+b+\delta) - f(ax+b)] =: a\frac{df(ax+b)}{d(ax+b)} = a\left.\frac{df(y)}{dy}\right|_{y=ax+b},$$
$$\frac{df(ax+b)}{dx} = a\left.\frac{df(y)}{dy}\right|_{y=ax+b}. \tag{5}$$

Výsledek jsme zapsali jako derivaci $f(y)$ dle proměnné $y = ax + b$. Obecnějším příkladem je řetězové pravidlo pro derivaci složené funkce $f(g(x))$, které je

$$\frac{df(g(x))}{dx} = \left.\frac{df(y)}{dy}\right|_{y=g(x)} \frac{dg(x)}{dx}, \tag{6}$$

která se pro příklad s $g(x) = ax + b$ redukuje na výše odvozený výsledek v rovnici (5).

2. Mocninná fce. x^a.

$$\frac{dx^n}{dx},\; n \in \mathbb{N}\cup\{0\} = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Podle binomické věty rozvineme člen, kde je proměnná x posunuta o ϵ, tedy

$$(x+\epsilon)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}\epsilon^k = x^n + nx^{n-1}\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2);\; \text{např. } (x+\epsilon)^3 = x^3 + 3x^2\epsilon + \underbrace{3x\epsilon^2 + \epsilon^3}_{\mathcal{O}(\epsilon^2)},$$

kde $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ označuje členy obsahující ϵ alespoň ve druhé mocnině (tj. zbytek sumy s $k \geq 2$).

$$\frac{dx^n}{dx} = \frac{1}{\epsilon}[(x+\epsilon)^n - x^n] = \frac{1}{\epsilon}[x^n + nx^{n-1}\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) - x^n] = \frac{1}{\epsilon}[nx^{n-1}\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)].$$

Očividně se první člen sumy (s $k = 0$) odečetl s neposunutou hodnotou fce.

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \to nx^{n-1}.$$

Je přirozené očekávat, že tentýž vzorec platí i pro obecnou mocninnou fci, tj. s neceločíselným exponentem.

3. Exponenciála, e^x.

Tzv. Eulerovo číslo e lze získat pomocí limity posloupnosti. Odtud dostaneme i e^x.

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \Rightarrow e^x = \left(\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right)^x = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{mx} =$$
$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{x}{mx}\right)^{mx} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

Pro celočíselná n můžeme opět rozvinout do řady a obdobně jako v příkladu 2 upravovat.

$$\frac{de^x}{dx} = \frac{1}{\epsilon}[e^{x+\epsilon} - e^x] = \frac{1}{\epsilon}e^x[e^\epsilon - 1] = e^x\frac{1}{\epsilon}\left[\left(1+\frac{\epsilon}{n}\right)^n - 1\right].$$

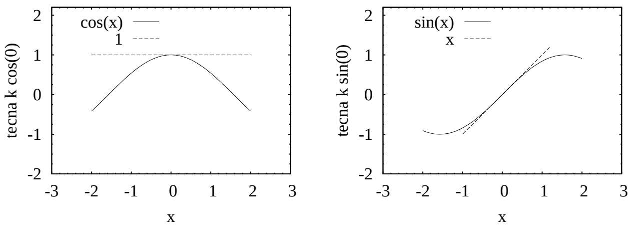
Lze vidět, že výraz za posledním rovná se představuje (pomineme-li e^x, jež ho násobí) derivaci fce. $(1 + x/n)^n$ vyčíslenou v bodě $x = 0$. Můžeme tedy aplikovat předchozí body, takže

$$\frac{de^x}{dx} = e^x\left(\frac{1}{n}\left.\frac{dy^n}{dy}\right|_{y=x/n+1}\right)(x=0) = e^x 1 = e^x.$$

Uvedená odvození nejsou matematicky zcela korektní, jedná se zejména o prohazování limit, jež si vyžaduje hlubší analýzy, do níž se pouštět nebudeme.

Poznámka: Odvození derivace e^x lze provést přes nalezení horního a dolního odhadu limit figurujících v definici derivace (rovnice (1)). Mnoho vzorců pak lze odvodit pomocí obecných vzorců pro derivace a derivace exponenciály, např $x^a = \mathrm{e}^{a\ln(x)}$.

Obrázek 1: Tečny v bodě $x = 0$.



4. Jednoduché goniometrické fce. - $\sin(x)$, $\cos(x)$.

   Jsou dva různé postupy - vyjít z definice, nebo využít platnosti tzv. Eulerova vzorce

   $$e^{\mathrm{i}x} = \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x);\ \mathrm{i}^2 = -1.$$

   Odtud přímo vychází vyjádření pro goniometrické fce, o něž se zajímáme, ve tvaru

   $$\sin(x) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x}\right);\ \cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x}\right).$$

   Pak s užitím bodů 1 ("$g(x) = \pm\mathrm{i}x$") a 3 dostaneme

   $$\frac{d\sin(x)}{dx} = \cos(x);\ \frac{d\cos(x)}{dx} = -\sin(x).$$

   I tyto výpočty nejsou zcela korektní, neboť v nich počítáme s fcemi. komplexní proměnné, o kterých zatím nic nevíme.

   Nyní zkusíme vyjít z definice derivace, užijeme součtové vzorce a geometrické interpretace derivace.

   $$\frac{d\sin(x)}{dx} = \frac{1}{\epsilon}[\sin(x+\epsilon) - \sin(x)] = \frac{1}{\epsilon}[\sin(x)\cos(\epsilon) + \cos(x)\sin(\epsilon) - \sin(x)] =$$
   $$\sin(x)\frac{1}{\epsilon}[\cos(\epsilon) - 1] + \cos(x)\frac{\sin(\epsilon)}{\epsilon} \to \sin(x)\left.\frac{d\cos(x)}{dx}\right|_{x=0} + \cos(x)\left.\frac{d\sin(x)}{dx}\right|_{x=0}.$$

   A teď ke geometrické interpretaci - derivace jako směrnice tečny ke grafu fce.

   Z průběhů fcí. sin a cos, nebo také z Obrázku 4 vidíme, že tečna ke kosinu v bodě $x = 0$ je rovnoběžná s osou x, tj. má rovnici $y = 0x + \text{konst.}$, tedy

   $$\left.\frac{d\cos(x)}{dx}\right|_{x=0} = 0.$$

   U sinu je to těžší, ale pečlivá geom. konstrukce by ukázala, že tečna k sinu v $x = 0$ je tvaru $y = x$, tedy

   $$\left.\frac{d\sin(x)}{dx}\right|_{x=0} = 1.$$

   Tedy můžeme uzavřít, že

   $$\frac{d\sin(x)}{dx} = \cos(x)$$

   Obdobně se dokáže, že derivace $\cos(x)$ je stejná jako při odvození přes derivaci exponenciály. Nebo lze užít skutečnosti, že $\cos(x) = \sin(x + \pi/2)$.

1.4 Něco k derivacím na závěr

1.4.1 Derivace derivace

Protože derivace fce. je opět nějaká fce, můžeme ji opět derivovat, dostáváme derivace vyšších řádů označované "mocninným" indexem

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df(x)}{dx}\right), \ldots, \frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}f(x)}{dx^{n-1}}\right).$$

1.4.2 Derivace - co to je? Ještě jednou.

Vzpomeňme si na derivaci mocninné funkce s celočíselným exponentem - Když jsme prováděli limitu, v definičním vztahu pro derivaci se objevily členy úměrné parametru posunutí ϵ; všechny až na jeden v limitě vypadly. Pro mocninnou fci. platí

$$(x+\epsilon)^n = x^n + \epsilon n x^{n-1} + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Vidíme, že fci. $(x+\epsilon)^n$ můžeme přibližně (ve smyslu do prvního řádu v malém parametru ϵ) zapsat jako její derivaci vynásobenou tímto parametrem posunutí. Skutečně, vyjdeme-li ze vzorce pro derivaci obecné funkce, prozatím zapomeneme na limitu a upravíme-li definiční rci, dostaneme

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{\epsilon}[f(x+\epsilon) - f(x)] + \mathcal{O}(\epsilon) \Rightarrow f(x+\epsilon) = f(x) + \epsilon\frac{df(x)}{dx} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{7}$$

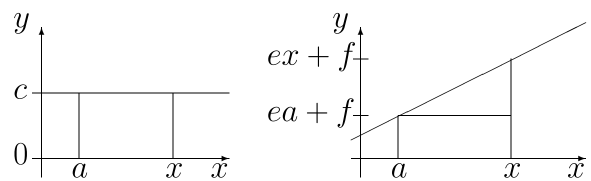
Na pravé strany jsme pro správnost přidali členy vyšších řádů, o nichž víme, že se mohou objevit (viz. příklad s mocninnou fcí. na začátku tohoto oddílu). Derivace tedy udává lineární přírůstek fce, což dobře odpovídá skutečnosti, že derivace určuje směrnici tečny ke grafu fce.

Přírůstek je zde myšlen vzhledem k malé změně ϵ proměnné x.

1.4.3 Derivace - co to je? Co takhle ještě jinak (s ohledem na to, co přijde)?

Označme $S([a,b], f(x))$ plochu ohraničenou grafem funkce $f(x)$, osou nezávisle proměnné x, a to na rozmezí $x \in [a,b]$. (Přirozeně předpokládáme, že fce. je tam definována.) Plochu ležící nad osou x bereme jako kladnou, plochu ležící pod osou x bereme jako zápornou.

Obrázek 2: Plocha pod přímkami $y = c$, $y = ex + f$.



Například plocha ohraničená konstantní fcí. na intervalu $[a,x]$ je plochou obdélníku

$$S([a,x], c) = c(x-a).$$

Nebo plocha ohraničená fcí. lineární nekonstantní fcí. $f(x) = ex+f$, se skládá z plochy trojúhelníku a obdélníku, jak je vidět z Obrázku 1.4.3, takže

$$S([a,x], ex+f) = \frac{1}{2}(x-a)([ex+f]-[ea+f]) + (ea+f)(x-a) = \frac{1}{2}ex^2 + fx - [\frac{1}{2}ea^2 + fa].$$

Vidíme, že tyto plochy jsou fcemi. proměnné x. Zkusíme je zderivovat:

$$\frac{dS([a,x],c)}{dx} = c\,; \ \frac{dS([a,x], ex+f)}{dx} = ex+f.$$

Navíc výsledek nezávisí na dolní mezi intervalu, což je v obou případech zřejmé.

Z těchto dvou ukázek přijměme za obecně platné následující tvrzení: *Derivace přiřadí fci.* $S([*,x], f(x))$ *fci.* $f(x)$. Hvězdička označuje nezávislost na dolní mezi. Symbolicky zapsáno máme

$$\frac{d}{dx} : S([*,x], f(x)) \mapsto f(x). \tag{8}$$

A co takhle najít pravidlo, které to dělá naopak?

1.4.4 Přehled vzorců

$$a \neq 0 : \frac{df(ax+b)}{dx} = a\left.\frac{df(y)}{dy}\right|_{y=ax+b};$$
$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1};\ \frac{de^x}{dx} = e^x;\ \frac{d\sin(x)}{dx} = \cos(x)\,;\ \frac{d\cos(x)}{dx} = -\sin(x).$$

2 Integrál

2.1 Definice

Hrubě řečeno, integrál je pravidlo, které fci. přiřadí fci, ale dělá to přesně opačně než derivace.

$$\text{"}\int dx\text{"} : f(x) \mapsto \int dx\, f(x)\,;\ g(x) = \frac{df(x)}{dx} \Rightarrow \int dx\, g(x) = f(x) + \text{konst}. \tag{9}$$

Derivování je proces, při němž šipka mezi rovnicemi směřuje obráceně (tedy $\Leftarrow$). Konstanta očividně vypadne a dostaneme rovnici, s níž jsme začali. Je tedy vidět, že integrál z funkce není určen jednoznačně!

Tato nejednoznačnost však není nic neobvyklého. Připomeňme si funkci $\sin : \mathbb{R} \mapsto [-1,1]$. Hledáme-li všechny kořeny rovnice $\sin x = a$, což lze chápat jako hodnotu inverzní funkce ($\sin^{-1}$) pak těchto kořenů je nekonečně mnoho a liší se o celočíselný násobek 2π. Při integraci je také nekonečně mnoho řešení, které se liší o konstantu.

Viz. následující tabulka. $\mathcal{F}$ označuje "prostor fcí.", $\mathcal{F}'$ jeho derivaci.

Zobrazení	Odkud $\mapsto$ kam	"Nejednoznačnost"
sin	$\mathbb{R} \mapsto [-1,1]$	$\sin(x+2k\pi) = \sin(x), \quad k \in \mathbb{Z}$
$\sin^{-1}$	$[-1,1] \mapsto \mathbb{R}$	$\sin^{-1}(\sin(x)) = x + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
$\frac{d}{dx}$	$\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}'$	$\frac{d}{dx}\text{konst} = 0$
$\int dx$	$\mathcal{F}' \mapsto \mathcal{F}$	$\int dx \left[\frac{d}{dx}f(x)\right] = f(x) + \text{konst}$

A co integrál umí?

2.2 Geometrický význam integrálu

Jemněji řečeno, *určitý integrál* je pravidlo, které fci. $f(x)$ a intervalu přiřadí plochu pod grafem ve smyslu sekce 1.4.3. Opět symbolicky

$$\int : f(x) \times [a,b] \mapsto \int_a^b dx f(x) = S([a,b], f(x)). \tag{10}$$

Ukazuje se, že lze psát

$$S([a,b], f(x)) = F(b) - F(a)\,;\ \frac{dF(x)}{dx} = f(x),$$

jak lze snadno vidět z ukázek v sekci 1.4.3. Fci. F zveme *neurčitým integrálem* z fce. f (nebo také primitivní fcí. k fci. f). Je zřejmé, že $F(x)$ není určena jednoznačně - mám-li dvě fce. (jedné proměnné) vyhovující podmínce, že jejich derivace dá stejnou fci, pak se tyto mohou lišit o konstantu. Vznik této neurčitosti lze snadno ukázat:

$$\frac{d}{dx} : S([*,x], f(x)) \mapsto f(x)\,;\ \int : f(x) \times [*,x] \mapsto \int_*^x dx f(x) = F(x) - F(*),$$

je dána neurčitostí v dolní mezi!

Plochu pod grafem si lze představit takto - fcí. hodnotu vynásobím "elementem posunutí" dx a dostávám tak plochu $f(x)dx$ malého obdélníčku pod grafem fce. na ose x ohraničeného intervalem $(x, x+dx)$. Znak integrálu znamená sečtení přes všechny body na zvoleném integračním intervalu.

Mám-li sumu, proměnnou je zde celočíselný index, $n \in \mathbb{Z}$, píšeme $\sum_n$. V případě integrálu je proměnná spojitá, snad proto byl zvolen nový znak $\int dx$ namísto sumy - ale i tak integrál znamená sčítání.

2.3 Jak počítat integrály?

Z našeho zavedení je jasné, že integrál je opačné pravidlo k derivaci, takže použijeme "obrácené" vzorečky pro derivace - např.

$$\frac{d\cos(x)}{dx} = -\sin(x) \Rightarrow \int dx \sin(x) = -\cos(x) + konst.$$

3 ODR = Obyčejné Diferenciální Rovnice

Diferenciální rovnice je rce, v níž hledaná fce. vystupuje i se svými derivacemi. Obyčejná znamená, že máme co do činění s fcí. (a tudíž i derivacemi pouze podle) jedné proměnné. Jednoduchoučký příklad je

$$\frac{df(x)}{dx} = g(x),$$

řeší se přímou integrací, jak je naznačeno v rci. (9). Pro názornost vezmeme konkrétní fci. $g(x)$.

$$\frac{df(x)}{dx} = x^a,\ a \neq -1 \Rightarrow f(x) = \int dx\, x^a = \int dx \left(\frac{a+1}{a+1}x^a\right) = \frac{1}{a+1}\int dx\, \frac{dx^{a+1}}{dx},$$
$$f(x) = \frac{x^{a+1}}{a+1} + \text{konst}.$$

Představuje-li ODR nějakou evoluční rovnici (nezávisle proměnnou standardně označovanou x je v tomto případě čas), pak mají integrační konstanty význam počátečních podmínek. Snadným příkladem je pohyb částice (konstantní) hmotnosti m za působení konstantní síly $\vec{F}$.

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \vec{F}\,;\ \frac{d\vec{F}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow m\frac{d\vec{x}}{dt} = \int dt\,\vec{F} = \vec{F}t + \vec{p}_0 \Rightarrow m\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{F}t^2 + \vec{p}_0 t + \vec{\chi}_0.$$

Podělíme hmotností a označíme

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}\,,\ \vec{v}_0 = \frac{\vec{p}_0}{m}\,,\ \vec{x}_0 = \frac{\vec{\chi}_0}{m},$$

dostaneme známý tvar ve vektorové podobě:

$$\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{x}_0. \tag{11}$$

Pozn. Obíhá-li těleso po kružnici, je podrobeno tzv. dostředivému zrychlení, jež má sice konstantní velikost, nikoli směr, takže nelze vzorec použít. Konstantností síly v čase se rozumí jak velikost, tak i směr!

Nějaké další příklady - složitější závislost levé strany rovnice, typově vyjádřená jako:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \Rightarrow g(y)dy = f(x)dx \Rightarrow G(y) = F(x) + \text{konst.} \Rightarrow y = G^{-1}(F(x) + \text{konst.}).$$

Vysvětleme naznačené řešení: převedeme všechny y na jednu stranu a na druhou všechna x, tj. provedeme tzv. separaci proměnných. Zintegrujeme a na obě strany rce. zapůsobíme inverzní fcí. k fci. G.

4 Možné výtky a poznámky pro zvídavé

Probereme několik věcí, které v textu byly pro souvislejší výklad pouze naznačeny. Výše zmíněných nekorektností si nebudeme všímat. Tyto poznámky si nekladou za cíl být úplným vysvětlením rozebíraného.

- Plochy - existence tzv. primitivní fce. F, tj. speciální tvar fce. S.

  $$\exists F : S([a,b], f) = F(b) - F(a).$$

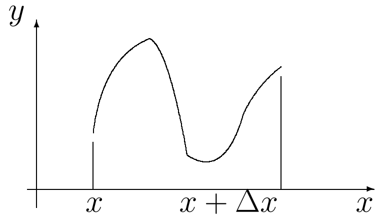
  Pro plochy platí několik jednoduchých pravidel (za předpokladu že všechny dílčí plochy jsou definovány):

  $$\begin{aligned} S([a,c], f(x)) + S([c,b], f(x)) &= S([a,b], f(x)),\ a \le c \le b,\\ S([a,b], \alpha f(x) + \beta g(x)) &= \alpha S([a,b], f(x)) + \beta S([a,b], g(x)),\\ S([a,a], f(x)) &= 0,\\ S([a,b], f(x)) &= -S([b,a], f(x)) \end{aligned}$$

  První pravidlo je jednoduché skládání ploch za sebe na ose x. Druhé je natahování (konstanty α, β) a sčítání ale v ose y. Třetí znamená, že máme "obdélníček" nulové tloušťky. Čtvrté říká, že plocha je kladná, když ji počítáme ve směru (kladném) osy x.

  Navržený tvar s fcí. F toto vše splňuje a víme, že pro příklady ze sekce 1.4.3 platí.

Obrázek 3: Příklad divoké fce.



- Jaká plocha?

  Máme-li nějakou divočejší fci, viz Obrázek 4, pak jak nejlépe získáme $S([x, x+\Delta x], f(x))$ pomocí jednoho obdélníčku/nudle? (Integrál si přece lze představit jako součet mnoha takových nudlí.) Jakou vzít fcí. hodnotu, když je nekonečně mnoho možností, např.

  1. $f(x)$ - počáteční hodnotu,
  2. $f(x + \Delta x)$ - koncovou (a co pravidlo čtyři z předchozího?),
  3. $f^{\text{MAX}}([x, x + \Delta x])$ - maximální hodnotu z intervalu,
  4. $f^{\text{MIN}}([x, x + \Delta x])$ - minimální ?

  Skutečnost je taková - při zavádění integrálu (ve smysly Riemanna) vezmu na každé dílčí nudli maximální a dostanu maximální plochu (horní odhad plochy) $S^{\text{MAX}}([a,b], f(x))$; vezmu minimální dostanu nejmenší plochu $S^{\text{MIN}}([a,b], f(x))$. Následně udělám víc užších nudlí, mnoho velmi tenkých nudlí (když je nudle dost tenká, fcí. hodnoty se příliš neliší) a pak tedy se blíží hodnota S^{MAX} hodnotě S^{MIN}. Vyjde-li v limitě pro nekonečně mnoho nekonečně tenkých nudlí $S^{\text{MAX}}_\infty = S^{\text{MIN}}_\infty$, klademe

  $$S^{\text{MAX}}_\infty = S^{\text{MIN}}_\infty = S.$$

  Máme plochu a tedy integrál v (Riemannově smyslu).