1 Vektory

V textu předpokládáme, že pracujeme v nějakém pevně zvoleném pravoúhlém (kartézském) souřadnicovém systému (KSS), v ortonormální bázi.

1.1 Základní operace a pojmy pro vektory

Laicky řečeno, vektor je řádek (nebo sloupec) čísel (popřípadě funkcí). Toto vyjádření však není zcela přesné, viz. pozdější sekce. Prozatím nám však postačí.

Reálná čísla označujeme $\mathbb{R}$, pak vektor pro nás bude znamenat trojici reálných čísel

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} =: \mathbb{R}^3,$$

čísla v_i nazýváme složky vektoru $\vec{v}$.

Vektory můžeme sčítat (viz. (1)), násobit reálnými čísly (viz. (2)), násobit mezi sebou skalárně (viz. (3)) anebo vektorově (viz. (4)). V následujícím přehledu operací užíváme stručný symbolický zápis vektoru pomocí jeho složek, $\vec{v} = (v_i)$.

$$\vec{v} = (u_i),\ \vec{u} = (v_i) \in \mathbb{R}^3,\ a \in \mathbb{R},$$

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_i + v_i) \in \mathbb{R}^3, \tag{1}$$

$$a\vec{u} = (au_i) \in \mathbb{R}^3, \tag{2}$$

$$\vec{u}\vec{v} = \sum_i u_i v_i \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1) \in \mathbb{R}^3. \tag{4}$$

Několik pojmů

- *Velikostí vektoru* $\vec{u}$ nazýváme číslo $u = [\vec{u}\vec{u}]^{1/2}$.
- Vektor $\vec{w}$ zveme *nulový*, je-li $w = 0$.
- Vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ nazýváme (navzájem) *kolmé*, je-li $\vec{u}\vec{v} = 0$.
- Vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ nazýváme *rovnoběžné*, platí-li $\vec{u} = a\vec{v}$, odtud pak $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.

1.2 Interpretace násobení vektoru vektorem

Pomocí velikostí vyjádříme skalární i vektorový součin dvou (nenulových) vektorů výpočtem ve složkách. Pro jednoduchost výpočtů můžeme zvolit vhodně orientovaný KSS; výsledky obou operací jsou objekty (skalár-číslo, vektor), které tato volba neovlivní (což samozřejmě nemusí platit o *složkách* vektoru!). KSS orientujeme tak, aby oba vektory ležely v rovině xy a vektor $\vec{v}$ ležel v ose x. Vektor $\vec{v}$ s ním svírá úhel, jenž označíme ϕ.

Pak složky vektorů, ortogonální rozklad (do navzájem kolmých částí) vektoru $\vec{v}$, výsledky skalárního (rovnice (3)) a vektorového (rovnice (4)) násobení jsou

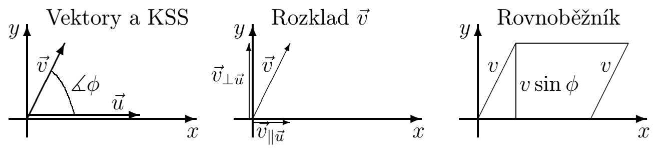
$$\vec{u} = (u, 0, 0),\ \vec{v} = v(\cos\phi, \sin\phi, 0),\ \vec{v} = \vec{v}_{\parallel\,\vec{u}} + \vec{v}_{\perp\,\vec{u}},$$

$$\vec{v}_{\parallel\,\vec{u}} = v\cos\phi\,(1,0,0) = (v\cos\phi)\frac{\vec{u}}{u},\ \vec{v}_{\perp\,\vec{u}} = v\sin\phi\,(0,1,0), \tag{5}$$

$$\vec{u}\vec{v} = uv\cos\phi\,;\ \vec{u} \times \vec{v} = uv\sin\phi\,(0,0,1). \tag{6}$$

Z rovnice (6) vidíme, že $u^{-1}\vec{u}\vec{v}$ udává průmět vektoru $\vec{v}$ do vektoru $\vec{u}$. S pomocí Obrázku 1 vidíme, že velikost vektorového součinu ($|\vec{u} \times \vec{v}|$) udává plochu rovnoběžnostěnu tvořeného vektory.

Obrázek 1: Součiny vektorů



1.3 Trochu pokročilé operace

Vektory lze derivovat a integrovat. Obě operace se provádí vždy po složkách, tj. na každé složce, obdobně k (2). Takže pro vektor $\vec{u}(w)$, který je funkcí proměnné w, platí

$$\frac{d\vec{u}(w)}{dw} = \left(\frac{du_1(w)}{dw}, \frac{du_2(w)}{dw}, \frac{du_3(w)}{dw}\right);\ \int dw\,\vec{u}(w) = \left(\int dw\,u_1(w), \int dw\,u_2(w), \int dw\,u_3(w)\right). \tag{7}$$

Užitím pravidla pro derivování součinu funkcí se ukáže, že

$$\frac{d}{dw}\left[\vec{u} \times \vec{v}\right] = \{\text{výpočet se složkami}\} = \frac{d\vec{u}}{dw} \times \vec{v} + \vec{u} \times \frac{d\vec{v}}{dw}. \tag{8}$$

2 Praktické užití ve fyzice

2.1 Moment hybnosti

Tělesu s (pro jednoduchost konstantní) hmotností m o polohovém vektoru $\vec{r}(t)$ přiřazujeme veličiny *hybnost* $\vec{p} := m\vec{v}$ a *moment hybnosti* $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.

Moment hybnosti se zachovává, platí-li

$$\vec{0} = \frac{d\vec{L}}{dt} = m\frac{d}{dt}\left[\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right] = m\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right) = \vec{0} + \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow \vec{0} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

2.2 Keplerova úloha - Keplerův zákon

Studujeme-li pohyb planet, jedná se o řešení systému gravitačně interagujících těles, z nichž nejvýznamnější vliv má Slunce, proto si dovolíme ostatní působení zanedbat. Dostáváme tzv. Keplerovu úlohu.

Polohu planety označíme $\vec{r}_P$, polohu Slunce $\vec{r}_S$. Pohybové rovnice jsou

$$m_P\vec{a}_P = -\frac{Gm_Pm_S}{|\vec{r}_P - \vec{r}_S|^3}[\vec{r}_P - \vec{r}_S],\ m_S\vec{a}_S = -\frac{Gm_Pm_S}{|\vec{r}_S - \vec{r}_P|^3}[\vec{r}_S - \vec{r}_P]. \tag{9}$$

Povšimněte si platnosti 3. Newtonova zákona (NZ)!

Zavedením nových souřadnic (relativní $\vec{r}$ a středu hmotnosti $\vec{R}$)

$$\vec{r} = \vec{r}_P - \vec{r}_S,\ \mu = \frac{m_Sm_P}{m_S + m_P};\ \vec{R} = \frac{m_S\vec{r}_S + m_P\vec{r}_P}{m_S + m_P},\ M = m_S + m_P.$$

lze rovnici (9) převést na

$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{0},\ \mu\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{G\mu M}{r^3}\vec{r}. \tag{10}$$

Dostali jsme tak rovnici pro rovnoměrný přímočarý pohyb těžiště a pro pohyb fiktivní částice hmotnosti μ a poloze $\vec{r}$. Na částici μ působí síla $\vec{F} \propto \vec{r}$. Z toho plyne, že zrychlení se děje pouze ve směru $\vec{r}$, pohyb je rovinný!

Důsledkem také je zachování momentu hybnosti částice μ, takže i jeho velikosti.

$$\text{konst.} = m^{-1}|\vec{L}| = |\vec{r} \times \vec{v}|\,.$$

Velikost rychlosti, s jakou přibývá plocha opsaná vektorem $\vec{r}$, w je

$$dS = \left|\frac{1}{2}\vec{r} \times (d\vec{r})\right| \Rightarrow w = \left|\frac{dS}{dt}\right| = \frac{1}{2}|\vec{r} \times \vec{v}| = \frac{1}{2m}|\vec{L}|.$$

Neboť $\vec{L}$ je konstantní, pak také w je konstantní.

Tím jsme získali jeden z Keplerových zákonů jako důsledek zachování momentu hybnosti.

3 Vektor - nejen sada čísel

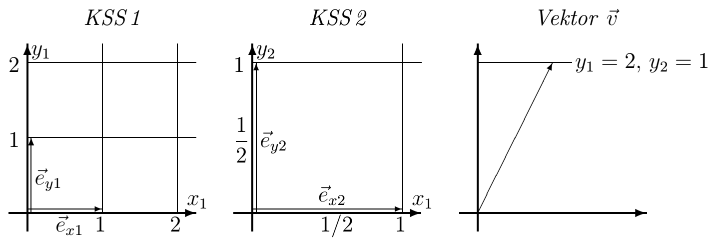
Upřesníme tvrzení, že vektor je jen sada čísel. V Obrázku 2 vidíme pravoúhlé (kartézské) souřadnicové systémy (KSS), tenké čáry označují linie konstantní souřadnice x (svislé), nebo y (vodorovné).

V obrázku jsou také zakresleny jednotkové vektory ve směrech x ($\vec{e}_x$) a y ($\vec{e}_y$), pomocí kterých vyjádřím všechny vektory v rovině jako jejich lineární kombinaci. Tj. pro každý vektor $\vec{u}$ jednoznačně existují čísla u_x a u_y tak, že

$$\vec{u} = u_x\vec{e}_x + u_y\vec{e}_y = (u_x, u_y).$$

Uvedli jsme také zkrácený zápis - řádek čísel. Soubor vektorů $\{\vec{e}_x,\ \vec{e}_y\}$ nazýváme bází a čísla u_x a u_y složky vektoru $\vec{v}$ v dané bázi.

Obrázek 2: Dvě různé báze



Zobrazené KSS se liší tím, že v každém z nich je zvoleno jiné měřítko. Pak vektor $\vec{v}$ znázorněný ve třetí části Obrázku 2 můžeme zapsat jako

$$\vec{v} = 1\vec{e}_{x1} + 2\vec{e}_{y1} = (1,2)_{KSS\,1} \quad \text{versus} \quad \vec{v} = \frac{1}{2}\vec{e}_{x2} + 1\vec{e}_{y2} = \left(\frac{1}{2}, 1\right)_{KSS\,2}. \tag{11}$$

Lze uvážit i báze, které nejsou pravoúhlé.

Z rovnice (11) vidíme, že "sloupeček čísel" (složky) závisí na tom, v jaké bázi vektor vyjadřuji!

Předpokládáme, že pracujeme v KSS, pak je báze tvořena navzájem kolmými vektory. Navíc předpokládáme, že tyto vektory jsou normované (jednotkové délky), tedy

$$\vec{e}_i\vec{e}_j \propto \delta_{i,j} := \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}\ ,\ |\vec{e}_i|^2 = \vec{e}_i\vec{e}_i = 1 \Rightarrow \vec{e}_i\vec{e}_j = \delta_{i,j}.$$

Pak lze psát známé vztahy

$$\vec{u}\vec{v} = \sum_{i,j} u_i v_j \vec{e}_i\vec{e}_j = \sum_{i,j} u_i v_j \delta_{i,j} = \sum_i u_i v_i\,,\ u\ = |\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}\vec{u}} = \sqrt{\sum_i u_i^2}.$$