

Měření Eulerova čísla z řetězovky

- Základní předpoklad: síla v řetězu je tečná k řetězu. Pak

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\rho g}{F} \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Odtud derivováním

$$y'' = \frac{1}{a} \sqrt{1 + y'^2}, \quad \text{kde} \quad a = \frac{F}{\rho g}$$

Tedy a je délka, ze které by musel řetěz viset svisle, aby v něm byla stejná síla jako ve vodorovném místě řetězu.

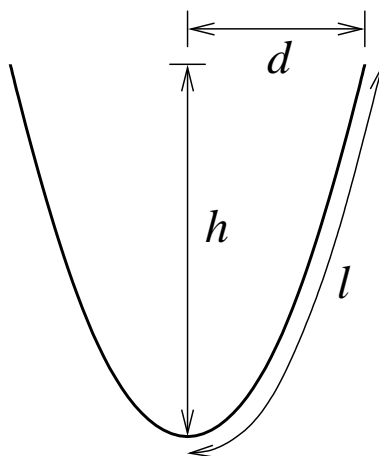
- Řešení:

$$y = a \cosh \frac{x}{a} + b$$

- Zkouška:

$$L = y'' = \frac{1}{a} \cosh \frac{x}{a}, \quad P = \frac{1}{a} \sqrt{1 + \sinh^2 \frac{x}{a}} = \frac{1}{a} \cosh \frac{x}{a}$$

- Nutno naškálovat x i y stejně
- Jak tedy změřit e ?
- Na řetězovce zavedeme parametry l, h, d :



- Pro délku oblouku platí:

$$L(x) = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_0^x \cosh \frac{x}{a} dx = a \sinh \frac{x}{a},$$

proto $l = a \sinh(d/a)$. Zároveň

$$h = a \left(\cosh \frac{d}{a} - 1 \right)$$

a proto

$$l^2 - h^2 = a^2 \left(\sinh^2 \frac{d}{a} - \cosh^2 \frac{d}{a} + 2 \cosh \frac{d}{a} - 1 \right) = 2ah,$$

odtud

$$a = \frac{l^2 - h^2}{2h}$$

- Postup:

1. Natáhneme řetěz, určíme přesně polohu $x = 0$ tak, že zavěsíme oba konce stejně vysoko a $x = 0$ je ve středu mezi konci
2. Změříme hodnoty l a h , vypočítáme a
3. Jdeme do vodorovné vzdálenosti a od vrcholu, změříme $z = y - a$ a tedy známe y . Víme, že

$$\frac{y}{a} = \cosh 1 = \frac{e + \frac{1}{e}}{2}$$

4. Můžeme se s tím už spokojit a řešit kvadratickou rovnicí

$$e^2 - 2e \frac{y}{a} + 1 = 0,$$

odkud

$$e = \frac{y}{a} + \sqrt{\frac{y^2}{a^2} - 1} = 1 + \frac{z}{a} + \sqrt{\left(\frac{z}{a} + 1\right)^2 - 1}$$

5. Nebo to uděláme jinak: změříme délku l' řetězu od vrcholu do bodu $x = a$, což je, jak známo, $l' = a \sinh 1$ a e pak vypočteme jako

$$e = \sinh 1 + \cosh 1 = \frac{y + l'}{a}$$

Pomůcky

- Řetěz
- Vodní váha na přesné určení vodorovného směru (asi bude stačit změřit olovnicí, že je tabule svislá, pak bude i vodorovná)
- Provázek jako olovnice
- Pásmo na měření délek
- Plastelína na připevnění řetězu k tabuli
- Kalkulačka