

ÚSTAV TEORETICKÉ FYZIKY A ASTROFYZIKY
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA MASARYKOVY UNIVERZITY

Teoretická mechanika

poznámky k přednáškám

Tomáš Tyc

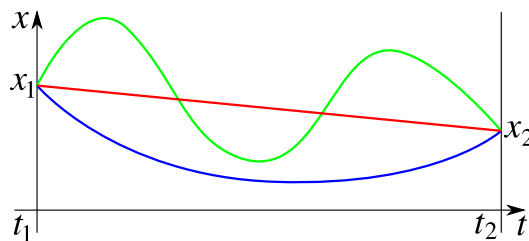
Poslední aktualizace: 24. října 2023

Tyto poznámky jsou určeny jako pomůcka pro porozumění přednáškám z předmětu Teoretická mechanika (F4120) a nemají ani nemohou nahradit učebnici teoretické mechaniky. Jsou k dispozici v elektronické podobě na adrese www.physics.muni.cz/~tomtyc/tm.pdf

1 Lagrangeova formulace mechaniky

1.1 Hamiltonův princip (princip stacionární akce)

- Fyzikální zákony lze často zformulovat lokálně nebo globálně:
 - lokální formulace – zkoumáme, co se děje v daném časovém okamžiku či v daném bodě; v mechanice jsou lokálními zákony Newtonovy zákony, v geometrické optice např. zákon odrazu a zákon lomu (Snellův zákon)
 - globální formulace – zkoumáme pohyb či jiný jev jako celek přes daný časový úsek; v mechanice Hamiltonův princip, v optice Fermatův princip stacionárního (či nejmenšího) času
- Hamiltonův princip se týká následující otázky: Předpokládejme, že máme nějakou částici, která se nachází se v daných vnějších podmínkách (v daném silovém poli). Je zadána počáteční a koncová poloha částice (tj. polohy v daných časech $t = t_1$ a $t = t_2$). Po jaké trajektorii se bude částice pohybovat? (Na obrázku jsou nakresleny různými barvami tři trajektorie.)



- Pro každou myslitelnou trajektorii (i zjevně nefyzikální či nesmyslnou) definujeme tzv. akci S , jejíž hodnota závisí na trajektorii jako celku
- Hamiltonův princip říká, že skutečný (fyzikální) pohyb nastává po takové trajektorii, pro kterou nabývá akce stacionární hodnoty (často je to zároveň hodnota nejmenší, ale ne vždy)
- Stacionárností akce myslíme to, že při malé změně trajektorie se s prvním řádu akce nezmění; více viz níže
- Akci pro danou trajektorii popsanou polohovým vektorem $\vec{r}(t)$ lze vypočítat jako integrál z tzv. Lagrangeovy funkce (lagrangiánu):

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L[\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t] dt \quad (1)$$

- Lagrangeova funkce závisí na souřadnicích, jejich prvních derivacích a případně na čase; většinou je rozdílem kinetické energie T a potenciální energie V
- Příklad** – hmotný bod v 3D prostoru v potenciálu $V(x, y, z, t)$:

$$L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = T - V = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z, t), \quad (2)$$

- Příklad** – hmotný bod v rovině, popis pomocí polárních souřadnic:

$$L(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}) = T - V = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r, \varphi), \quad (3)$$

- Příklad** – nabitá částice (s nábojem q) v elektromagnetickém poli. Lagrangián je

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + q\vec{v}\vec{A} - q\phi,$$

kde \vec{A} a ϕ je vektorový a skalární potenciál, se kterými souvisí elektrické a magnetické pole jako $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$, $\vec{E} = -\text{grad } \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$.

Odvození charakteru pohybu přímo z principu stacionární akce

Jak si ukážeme, z principu stacionární akce lze odvodit (lokální) pohybové zákony. Lze ale na základě principu stacionární akce nějak vystihnout charakter pohybu přímo? Ano, lze. My si to ukážeme na několika příkladech. Přitom budeme uvažovat, že akce je nejen stacionární, ale zároveň i nejmenší

- Uvažujme **volnou částici** (potenciální energie je všude nulová, na částici nepůsobí žádné síly). Předpokládejme, že **počáteční a koncový bod splývají**. Jakému pohybu odpovídá nejmenší akce?

– Akce nemůže být v tomto případě záporná, protože při $V = 0$ je $S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2}mv^2 dt$. Nulová akce, a tedy i nejmenší možná, pak odpovídá tomu, že částice celou dobu stojí na místě.

- Uvažujme opět **volnou částici**, tentokrát ale **počáteční a koncový bod nespývají**.

– Pokud by se částice pohybovala mezi oběma body po zakřivené dráze, musela by urazit větší vzdálenost, než pokud se bude pohybovat přímo. Díky tomu by musela mít v průměru větší rychlost, což by zvětšilo akci. Proto je nejvýhodnější přímočarý pohyb.

– Označme a vzdálenost počátečního a koncového bodu a srovnajme akci pro rovnoměrný pohyb, $S_1 = \frac{m}{2}(\frac{a}{T})^2 T = \frac{ma^2}{2T}$ a pro takový pohyb, kdy by částice po dobu $T/2$ byla v klidu a pak proběhla dráhu a za zbylý čas $T/2$, což je $S_2 = \frac{m}{2}(\frac{2a}{T})^2 T/2 = \frac{ma^2}{T}$. Menší akce tedy odpovídá rovnoměrnému pohybu.

– Podobně by se ukázalo, že akce by byla větší než pro rovnoměrný pohyb i tehdy, kdyby rychlosti částice v intervalech $[0, T/2]$ a $(T/2, T]$ jakkoli lišily. Akce je tedy menší pro rovnoměrný pohyb než pro pohyb nerovnoměrný.

– Tuto úvahu lze aplikovat na libovolně malý úsek dráhy, takže je vidět, že nejmenší akce odpovídá rovnoměrnému pohybu

Celkově tedy pro volnou částici získáváme výsledek, že bude setrvávat v klidu nebo se bude pohybovat rovnoměrně přímočaře. To je přesně 1. Newtonův zákon, zákon setrvačnosti, který jsme takto odvodili *přímo* z principu nejmenší akce.

- Uvažujme **částici v homogenním gravitačním poli**, pro jednoduchost v 1D (na svislé přímce), počáteční a koncová poloha nechtě opět splývají ($y_1 = y_2 = 0$) a odpovídají nulové hladině potenciální energie, počáteční a koncový čas jsou po řadě 0 a T .

– Otázka: bude akce minimální tak jako u volné částice pro takový pohyb, kdy částice stojí na místě? Nyní už ne, protože v akci kromě kinetické hraje roli i gravitační potenciální energie $V = mgy$.

– Pro snížení akce bude výhodnější, aby se částice nějakou dobu nacházela v místech s kladnou potenciální energií

– Ideální proto bude, aby částice vyletěla nahoru a pak zase spadla dolů. Ne ale příliš vysoko, protože pak by zase příliš narostla kinetická energie a tím i akce

– Navíc je výhodné, aby částice déle prodlévala ve větší výšce, aby se v akci více uplatnil vliv potenciální energie. Proto je výhodný nerovnoměrný pohyb – ve větší výšce malá rychlost, v menší výšce větší rychlost. Ideální tedy bude zrychlený pohyb se zrychlením směřujícím dolů.

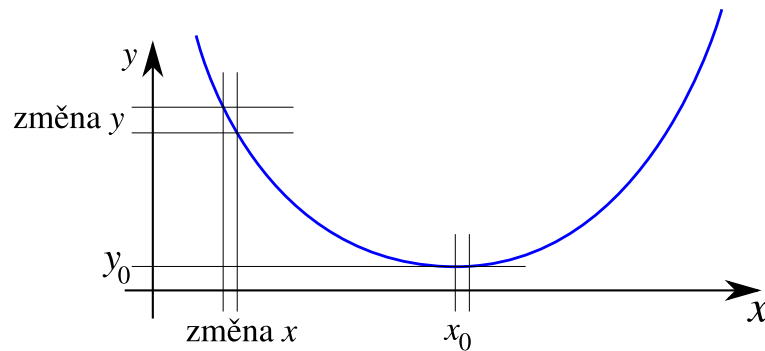
– Přesně takový pohyb bychom v gravitačním poli čekali na základě 2. Newtonova zákona.

1.2 Eulerovy-Lagrangeovy rovnice

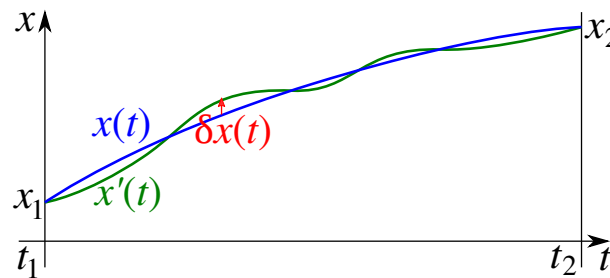
- Uvažujme pro jednoduchost jednorozměrný pohyb částice v potenciálu V , v počátečním čase t_1 je její poloha x_1 a v koncovém čase t_2 je její poloha x_2
- Základní myšlenka: pokud najdeme trajektorii $x(t)$, které odpovídá stacionární akce, pak pro trajektorii k ní blízkou $x'(t)$ se bude akce lišit jen velmi málo – nikoli v prvním, ale až druhém řádu změny trajektorie
- Je to podobné jako u běžné funkce $y(x)$. V okolí bodu $x = x_0$ ji můžeme rozvinout do Taylorovy řady

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots \quad (4)$$

Při velmi malé změně x se změní také y , a to obvykle lineárně se změnou x (konstantou úměrnosti je zde y'). Pokud má ale funkce $y(x)$ v bodě x_0 stacionární bod (např. minimum), je derivace dy/dx nulová a změna y proto bude mnohem menší – až druhého řádu ve změně x , viz třetí člen v rovnici (4) a následující obrázek:



- Rozdíl obou trajektorií označme $\delta x(t)$, tedy $x'(t) = x(t) + \delta x(t)$. Funkce $\delta x(t)$ je nulová pro $t = t_1$ a $t = t_2$, protože obě trajektorie splňují okrajové podmínky $x(t_1) = x_1$ a $x(t_2) = x_2$:



- Vyjádřeme akci pro změněnou trajektorii:

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L[x(t) + \delta x(t), \dot{x}(t) + \delta \dot{x}(t), t] dt \quad (5)$$

- Rozvineme $L[x(t) + \delta x(t), \dot{x}(t) + \delta \dot{x}(t), t]$ do Taylorovy řady, přičemž explicitně píšeme jen členy prvního řádu:

$$L[x(t) + \delta x(t), \dot{x}(t) + \delta \dot{x}(t), t] = L[x(t), \dot{x}(t), t] + \frac{\partial L}{\partial x} \delta x(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x}(t) + [\text{čvř}]. \quad (6)$$

Zde [čvř] značí souhrn všech členů řádu vyššího než prvního v δx a $\delta \dot{x}$. Nyní dosadíme (6) do (5):

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L[x(t), \dot{x}(t), t] dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial x} \delta x(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x}(t) dt + [\text{čvř}] \quad (7)$$

Poslední integrál převedeme metodou *per partes*, tj. využijeme vztahu

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta x(t) \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{d}{dt} \delta x(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x}(t), \quad (8)$$

který do integrálu dosadíme, a dostaneme

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x}(t) dt = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta x(t) \right]_{t_a}^{t_b} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \delta x(t) dt \quad (9)$$

Protože $\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0$, vynuluje se hranatá závorka a pro akci S' nakonec dostáváme

$$S' = S + \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right] \delta x(t) dt + [\text{čvř}] \quad (10)$$

- Integrál v rovnici (10) vyjadřuje tzv. *první variaci* akce, tedy lineární část změny akce odpovídající změně trajektorie $\delta x(t)$; značíme ji δS
- Jestliže se akce v prvním řádu neliší, měl by být integrál v rovnici (10) nulový pro každou odchylku $\delta x(t)$ obou trajektorií. To je možné jedině tehdy, jestliže je v každém čase nulová hranatá závorka, tedy jestliže

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}, \quad (11)$$

což je výsledek celého odvození – tzv. Eulerova-Lagrangeova rovnice, která popisuje pohyb v každém okamžiku a je tedy pohybovou rovnicí.

- Má-li soustava více stupňů volnosti, platí podobná rovnice pro každý z nich:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (12)$$

- **Příklad:** pro lagranián (2) rovnice (12) dají

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad m\ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad m\ddot{z} = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad \text{neboli} \quad m\ddot{\vec{r}} = -\nabla V = \vec{F}, \quad (13)$$

což je druhý Newtonův zákon, protože síla je záporně vzatý gradient z potenciální energie.

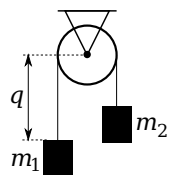
- **Příklad:** pro lagranián (3) rovnice (12) dají:

$$m\ddot{r} = mr\dot{\varphi}^2 - \frac{\partial V}{\partial r}, \quad \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = -\frac{\partial V}{\partial \varphi} \quad (14)$$

První rovnici lze přepsat jako $m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -\frac{\partial V}{\partial r}$, což je průmět 2. Newtonova zákona do radiálního směru, protože zrychlení v radiálním směru je $\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$ a síla je $-\partial V/\partial r$. Druhou rovnici můžeme přepsat jako $\dot{L} = M$, kde L, M jsou po řadě moment hybnosti částice a moment síly působící na částici, oba vztažené k počátku soustavy souřadnic¹.

- **Příklad: jednoduchý kladkostroj.**

Máme jeden stupeň volnosti, zobecněnou souřadnici q označíme podle obrázku. Velikosti rychlostí obou těles jsou \dot{q} , jejich potenciální energie jsou po řadě $-m_1 g q$ a $m_2 g q$, lagranián je tedy $L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{q}^2 + (m_1 - m_2)gq$. Lagrangeova rovnice (12) pak dá $\ddot{q} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$.



¹Protože uvedenou derivaci můžeme přepsat jako $-\frac{\partial V}{\partial r} = -r \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{r\Delta\varphi} = rF_\varphi = M$ (F_φ je úhlová složka síly působící na částici).

1.3 Vlastnosti Lagrangeovy funkce

V předchozím jsme si řekli, že Lagrangeova funkce je rozdílem kinetické a potenciální energie. Lze tuto skutečnost odvodit z nějakých obecnějších úvah a principů? Odpověď je kladná; o takové odvození se budeme nyní snažit. Budeme proto uvažovat, že o tvaru Lagrangeovy funkce L zatím nic nevíme – víme jen to, že L existuje a že platí Hamiltonův princip.

1.3.1 Otázka jednoznačnosti Lagrangeovy funkce

- Může se stát, že dvě různé Lagrangeovy funkce dají stejné pohybové rovnice (a jsou tedy ekvivalentní)?
- Ano. Například vynásobením lagrangiánu konstantou nebo přičtením konstanty rovnice nezmění (dokažte si sami).
- Rovnice se nezmění ani tehdy, když k lagrangiánu přičteme úplnou časovou derivaci libovolné funkce souřadnic a času (ale ne rychlostí). Tedy pokud

$$L' = L + \frac{df(q_1, \dots, q_n, t)}{dt}, \quad (15)$$

lagrangiány L i L' dávají stejné pohybové rovnice

- Přímý důkaz je poněkud zdlouhavý. Lepší je využít Hamiltonův princip. Vypočítejme akci odpovídající L' pro libovolnou trajektorii:

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L' dt = \int_{t_1}^{t_2} L dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{df(q_1, \dots, q_n, t)}{dt} dt = S + [f(q_1, \dots, q_n, t)]_{t_1}^{t_2}. \quad (16)$$

Protože jsou zobecněné souřadnice v počátečním i koncovém čase pevně zadané, je poslední člen nezávislý na trajektorii. Proto obě akce S i S' nabývají minima pro stejnou trajektorii a pohyby popsané oběma lagrangiány jsou tedy shodné. Proto musí být stejné i pohybové rovnice. Také je vidět, že kdyby f záviselo i na rychlostech, které v okrajových bodech trajektorie zadané nejsou, pohyb a tedy i rovnice by už stejné nebyly.

- **Příklad:** nechť $f(q, t) = q^3 \sin at$. Ověřme přímým výpočtem, že lagrangiány L a $L' = L + \dot{f}$ dají stejné pohybové rovnice. Platí $L' = L + 3q^2 \dot{q} \sin at + aq^3 \cos at$ a

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{d}{dt} 3q^2 \sin at = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + 6q\dot{q} \sin at + 3aq^2 \cos at \quad (17)$$

$$\frac{\partial L'}{\partial q} = \frac{\partial L}{\partial q} + 6q\dot{q} \sin at + 3aq^2 \cos at \quad (18)$$

Na obou stranách pohybové rovnice $\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L'}{\partial q}$ se tedy objeví stejné členy, které po odečtení dají rovnici $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}$. Tím je ekvivalence obou rovnic pro tento příklad přímým výpočtem ověřena.

- Aditivnost: nechť je systém složen ze dvou podsystémů A, B , z nichž první je popsán zobecněnými souřadnicemi q_1, \dots, q_m a druhý q_{m+1}, \dots, q_n . Předpokládejme nyní, že lagrangián systému je součtem lagrangiánů obou podsystémů:

$$L = L_A + L_B \quad \text{neboli} \quad L = L_A(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, t) + L_B(q_{m+1}, \dots, q_n, \dot{q}_{m+1}, \dots, \dot{q}_n, t). \quad (19)$$

Jak se lze snadno přesvědčit, pohybové rovnice pro stupně volnosti podsystému A (tj. $1, 2, \dots, m$) nyní neobsahují proměnné q_{m+1}, \dots, q_n podsystému B a naopak. To znamená, oba podsystémy se nijak neovlivňují. A platí to i naopak: pokud dva podsystémy nějakého systému spolu neinteragují, pak celkový lagrangián je součtem lagrangiánů obou podsystémů.

- Fyzikálně může být tato situace realizována např. tak, že oba podsystemy jsou si velmi vzdálené. Jiný příklad – u lagrangiánu v homogenním gravitačním poli rovnoběžném s některou kartézskou souřadnicovou osou (např. z) jsou pohyby ve třech směrech x, y, z nezávislé, protože $L = (\frac{m\dot{x}^2}{2}) + (\frac{m\dot{y}^2}{2}) + (\frac{m\dot{z}^2}{2} - mgz)$ se právě uvedeným způsobem separuje.

1.3.2 Tvar Lagrangeovy funkce

- Mechanickou soustavu vždy sledujeme vzhledem k nějaké soustavě, vůči níž měříme např. polohy a rychlosti částic v závislosti na čase. Takové soustavě říkáme **vztažná soustava**.
- Uvažujme částici velmi vzdálenou od všech jiných těles, takže ji nic neovlivňuje (nepůsobí na ni žádné síly). Takové částici říkáme **volná**.
- Při zkoumání pohybu částice velmi záleží na tom, jakou použijeme vztažnou soustavu; v některé může pohyb vypadat velmi složitě, v jiné jednoduše². Dokonce mohou být neekvivalentní různé časové okamžiky (když např. budeme pozorování provádět z kosmické lodi se zapnutým motorem, který ji stále rychleji roztáčí, bude pohyb částice v jednom čase jiný než v jiném čase, tj. různé okamžiky jsou neekvivalentní). Lze pak říci, že čas se jeví v této soustavě jako nehomogenní. Podobně může být i prostor nehomogenní, ale i anizotropní. Např. při pohledu z rovnoměrně a přímočaře zrychlující rakety by zmíněná volná částice nemohla nikdy setrvat v klidu.
- Experiment však ukazuje, že ve zmíněném případě volné částice lze vždy najít takovou vztažnou soustavu, že čas se jeví jako homogenní a prostor jako homogenní a izotropní. Takové soustavě říkáme **inerciální**. Pokud je vůči této soustavě volná částice v klidu v nějakém okamžiku, bude v klidu stále.
- Uvažujme o Lagrangeově funkci volné částice vůči inerciální soustavě. Lagrangeova funkce nemůže obsahovat polohu částice ani čas z důvodu homogenity prostoru a času, a z důvodu izotropie prostoru nemůže obsahovat ani směr rychlosti. Z veličin \vec{r}, \vec{v}, t tak zbývá pouze velikost rychlosti, na niž může L záviset. Lze to zapsat jako

$$L = L(v^2) \quad (20)$$

- Díky nezávislosti L na \vec{r} máme $\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0$ a z Lagrangeovy rovnice pak plyne

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \text{const.} \quad (21)$$

(Zde jsme zavedli derivování skaláru podle vektoru. Je tím myšlen vektor, jehož složky jsou derivace onoho skaláru podle jednotlivých složek onoho vektoru, tedy $\partial L / \partial \vec{v} \equiv (\partial L / \partial v_1, \partial L / \partial v_2, \partial L / \partial v_3)$).

- Ovšem $\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}$ je funkcí pouze rychlosti a proto musí platit

$$\vec{v} = \text{const.} \quad (22)$$

- Dospěli jsme k velmi důležitému výsledku – v inerciální soustavě se částice pohybuje konstantní rychlostí (velikost i směr), tedy rovnoměrně přímočaře. To je známý **zákon setrvačnosti**.
- Jestliže nyní vybereme jinou vztažnou soustavu, která se vůči té první pohybuje rovnoměrně přímočaře, pak zjevně pohyb volné částice i vůči ní bude rovnoměrný přímočarý a je to tedy rovněž inerciální soustava.

²Např. při pozorování ostatních planet ze Země je jejich pohyb poměrně složitý a vypadá to, jakoby kolem Země obíhaly.

- Existuje tedy nikoli jen jedna, ale nekonečně mnoho inerciálních soustav, které se vzájemně pohybují rovnoměrně a přímočaře, a v nich všech jsou zákony mechaniky stejné. Toto je **Galileiho princip relativity** – jeden z nejvýznamnějších principů mechaniky
- V důsledku toho neexistuje nějaká jediná vztažná soustava „lepší“ než ostatní nebo absolutní pohyb – úloha se dvěma vejci³
- Rychlosti částice vzhledem oběma soustavám spolu souvisí vztahem

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}, \quad (23)$$

kde \vec{u} je rychlost soustavy S' vzhledem k S .

- Integrací tohoto vztahu podle času nalezneme přepočtení souřadnic:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{u}t + \vec{r}_0 \quad (24)$$

- Tento přepočtení souřadnic spolu triviálním přepočtením času $t = t'$ vyjadřuje tzv. **Galileiho transformaci**
- Vraťme se ke tvaru Lagrangeovy funkce. Jaká je její závislost na \vec{v} ? Pokud je pohyb v inerciálních soustavách S a S' ekvivalentní, musí se lagrangiány lišit členem $df(\vec{r}, t)/dt$. Uvažujme, že vzájemná rychlost soustav je malá. Pro rychlosti máme transformaci $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$ a proto

$$L' = L(v'^2) = L(v^2 - 2\vec{u}\vec{v} + u^2) = L(v^2) - 2\frac{\partial L(v^2)}{\partial v^2} \vec{u}\vec{v} + [\text{čvř}], \quad (25)$$

kde [čvř] značí souhrn členů druhého a vyššího řádu v \vec{u} . Rozdíl $L' - L$ má být roven $df(\vec{r}, t)/dt$, proto v prvním řádu v \vec{u} máme

$$-2\frac{\partial L(v^2)}{\partial v^2} \vec{u}\vec{v} = \frac{df(\vec{r}, t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} \vec{v} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (26)$$

- Protože $\partial f/\partial t$ může být funkcí pouze \vec{r} a t , musí vzhledem k této rovnici platit $\partial f/\partial t = 0$ a tedy

$$-2\frac{\partial L(v^2)}{\partial v^2} \vec{u} = \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} \quad (27)$$

Derivace na levé straně rovnice může být funkcí nanejvýš \vec{v} , ale na pravé straně se \vec{v} nemůže objevit. Proto musí být $\partial L/\partial v^2$ rovno konstantě, kterou označíme $m/2$, a $f = -m\vec{u}\vec{r}$. Veličina m se nazývá **hmotnost** částice.

- Pro jedinou volnou částici v inerciální soustavě pak platí

$$L = \frac{m}{2}v^2. \quad (28)$$

- Pro soustavu neinteragujících částic pak vzhledem k rovnici (19) platí

$$L = \sum_a \frac{m_a}{2}v_a^2, \quad (29)$$

kde a indexuje částice.

³Úloha spočívá v následující otázce: mám dvě stejná vejce, první držím v ruce na místě, druhým vejcem pak narazím na první. Které vejce se rozbije? Odpověď je, že to nelze rozhodnout – na tom, které vejce se pohybuje, nezáleží. Při pohledu z jiné vztažné soustavy se pohybuje první vejce, zatímco druhé stojí na místě.

- Jestliže částice interagují, bude v lagrangiánu navíc funkce popisující interakci, která závisí na souřadnicích částic. Označíme ji $-V$. Pak

$$L = \sum_a \frac{m_a}{2} v_a^2 - V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n). \quad (30)$$

V se nazývá potenciální energií soustavy.

- Síla, která působí na a -tou částici, je $\vec{F}_a = -\partial V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n)/\partial \vec{r}_a$ a je tedy určena polohami ostatních částic ve *stejném* čase. Interakce je tedy v popisu klasické mechaniky okamžitá, není zpožděná. Ve skutečnosti ale interakce okamžitá není, šíří se nanejvýš rychlostí světla. Tento nesoulad teoretické mechaniky s experimentem lze odstranit přechodem k relativistické teorii.

1.4 Zákony zachování

- Mechanická soustava se většinou nějak pohybuje. Jinými slovy, obecně se mění veličiny, které popisují její stav – zobecněné souřadnice q_i , zobecněné rychlosti \dot{q}_i a různé další veličiny, které na nich závisí (moment hybnosti, energie atd.). Často ale existují i veličiny, které zůstávají stále stejné – zachovávají se. Takovým veličinám říkáme **integrály pohybu**. Nejznámějšími z nich jsou energie a hybnost, které se zachovávají např. u izolované mechanické soustavy.
- Uvažujme soustavu, u níž lagrangián *nezávisí na některé zobecněné souřadnici* q_k (na \dot{q}_k záviset může). Taková souřadnice se nazývá **cyklická**. Pak se zachovává veličina

$$p_k \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}, \quad (31)$$

protože díky Lagrangeově rovnici platí $\dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$. Veličina p_k definovaná rovnicí (31) se nazývá **zobecněná hybnost** příslušná souřadnici q_k .

- **Příklad: pohyb v homogenním gravitačním poli.** Uvažujme částici v homogenním gravitačním poli. V kartézských souřadnicích, jejichž osa z míří proti směru pole, je

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz. \quad (32)$$

Cyklickými souřadnicemi jsou x, y , proto se zachovávají příslušné zobecněné hybnosti $p_x = \partial L/\partial \dot{x} = m\dot{x}$ a $p_y = \partial L/\partial \dot{y} = m\dot{y}$.

- **Příklad: pohyb v centrálním poli popsáný ve sférických souřadnicích.** Uvažujme částici v centrálním poli, tj. v potenciálu, který závisí jen na vzdálenosti r od daného bodu. Umístíme počátek sférických souřadnic do centra pole, Lagrangián pak bude

$$L = \frac{m}{2}(r^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta \dot{\varphi}^2) - V(r). \quad (33)$$

Souřadnice φ je zjevně cyklická, proto se zachovává zobecněná hybnost $p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \sin^2\theta \dot{\varphi}$. Fyzikálně má p_φ význam průmětu vektoru momentu hybnosti částice do směru osy z (od které měříme úhel θ). Protože směr osy si můžeme zvolit libovolně, zachovává se vektor momentu hybnosti vzhledem k centru pole.

Zákony zachování v izolované soustavě částic

- Uvažujme izolovanou soustavu částic, tedy takovou, která je natolik vzdálena od jiných těles, že na ni nepůsobí žádné vnější síly. Částice uvnitř soustavy ale spolu mohou interagovat.
- Při popisu naší soustavy z pohledu inerciální vztažné soustavy víme, že prostor je homogenní a izotropní a čas je homogenní. Z těchto vlastností plyne několik velmi důležitých zákonů zachování.

1.4.1 Homogenita času – zachování zobecněné energie

- Uvažujme soustavu, u níž lagrangián *nezávisí explicitně na čase*, tedy $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$. To zahrnuje izolovanou soustavu částic, ale také libovolnou situaci, kdy vnější podmínky (silová pole, vazby atd.) jsou neměnné v čase. Tehdy se zachovává tzv. **zobecněná energie** definovaná vztahem

$$\mathcal{E} = \left(\sum_i p_i \dot{q}_i \right) - L \quad (34)$$

Přesvědčíme se o tom výpočtem časové derivace:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \sum_i \left(\dot{p}_i \dot{q}_i + p_i \ddot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} = 0, \quad (35)$$

kde se první člen v závorce zrušil se třetím díky Lagrangeově rovnici.

- Zobecněná energie je často rovna celkové energii soustavy, ale někdy není.
- **Příklad:** Uvažujme kuličku, která může klouzat ve vodorovné trubce rotující stálou úhlovou rychlostí ω kolem svislé osy. Máme jeden stupeň volnosti, vzdálenost kuličky od osy rotace označíme r , potenciál chybí ($V = 0$). Lagrangián a zobecněná hybnost jsou

$$L = T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \omega^2 r^2), \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad (36)$$

zobecněná energie a celková mechanická energie pak jsou

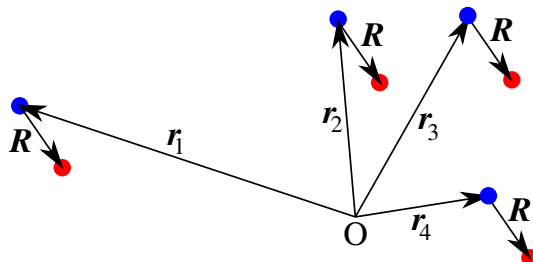
$$\mathcal{E} = p\dot{r} - L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 - \omega^2 r^2), \quad E = T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \omega^2 r^2). \quad (37)$$

Protože lagrangián *nezávisí explicitně na čase*, \mathcal{E} se zachovává. Celková energie E se přitom ale zachovávat nemůže, protože pak by se musely zachovávat samostatně oba členy v rovnicích (37), což není možné. Že se celková energie skutečně mění, je vidět z toho, že trubka koná nad kuličkou práci (nebo ji spotřebovává).

- Zachování energie často umožňuje zjednodušit (a díky tomu i vyřešit) pohybové rovnice, viz dále kapitola 1.5. Jindy nám dovoluje o daném problému něco zjistit, co bychom jinak zjišťovali jen velmi obtížně, např. v úloze o tom, kdy se oddělí tělísko klouzající po kulovém povrchu.

1.4.2 Homogenita prostoru – zachování celkové hybnosti

- Je-li prostor homogenní, pak se lagrangián nezmění, jestliže soustavu jako celek přemístíme – říkáme, že L je *invariantní vůči posunutí v prostoru*
- Budeme pracovat v kartézských souřadnicích. Zobecněnými souřadnicemi tedy budou kartézské složky polohových vektorů jednotlivých částic. Posunutí můžeme matematicky vyjádřit jako $\vec{r}_a \rightarrow \vec{r}_a + \vec{R}$, kde a indexuje částice a \vec{R} je posunutí (stejně pro všechny částice!), viz obrázek, v němž původní polohy částic jsou vyznačeny modře a nové červeně:



- Provedeme rozvoj lagrangiánu posunuté soustavy do Taylorovy řady

$$L'(\vec{r}_a) = L(\vec{r}_a + \vec{R}) = L(\vec{r}_a) + \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} \vec{R} + [\text{čvř}]. \quad (38)$$

- Má-li být $L' = L$, musí být nulový každý člen rozvoje, tedy i lineární, a proto

$$\sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} = 0 \quad (39)$$

Využitím Lagrangeových rovnic pro jednotlivé částice pak dostaneme

$$0 = \sum_a \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_a} = \frac{d}{dt} \sum_a \vec{p}_a = \frac{d\vec{P}}{dt}, \quad (40)$$

kde $\vec{P} = \sum_a \vec{p}_a = \sum_a m_a \vec{v}_a$ je celková hybnost soustavy. Vidíme tedy, že u **izolované soustavy se zachovává celková hybnost**.

- Celkovou hybnost soustavy můžeme vyjádřit užitečným způsobem, jestliže zadefinujeme tzv. hmotný střed soustavy jako bod s polohovým vektorem

$$\vec{R} = \frac{\sum_a m_a \vec{r}_a}{\sum_a m_a}. \quad (41)$$

Pak zjevně platí

$$\vec{P} = \left(\sum_a m_a \right) \dot{\vec{R}} = M \dot{\vec{R}} \quad (42)$$

- Vztah mezi hybností soustavy \vec{P} a rychlostí jejího hmotného středu je tedy analogický vztahu, který platí pro jedinou částici (tj. $\vec{p}_a = m_a \dot{\vec{r}}_a$), přičemž konstantou úměrnosti je $M = \sum_a m_a$. Soustava se tedy v tomto smyslu chová jako jediné těleso o hmotnosti dané součtem hmotností jednotlivých částic – hmotnost je tedy **aditivní** veličina.
- Navíc víme, že se zachovává hybnost izolované soustavy, zachovává se tedy i rychlost hmotného středu; **hmotný střed tudíž koná rovnoměrný přímočarý pohyb** bez ohledu na vzájemné interakce uvnitř soustavy.
- Vraťme se k rovnici (39) a dosadme do ní lagrangián (30). Dostaneme

$$-\sum_a \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_a} = \sum_a \vec{F}_a = 0. \quad (43)$$

Vezmeme-li soustavu jen ze dvou částic, vidíme, že $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$, což je *zákon akce a reakce*.

1.4.3 Izotropie prostoru – zachování celkového momentu hybnosti

- Uvažujme opět izolovanou soustavu částic. Lagrangián se nezmění ani tehdy, když celou soustavu pootočíme – prostor je izotropní, tedy ve všech směrech stejný.
- Při pootočení o malý úhel φ kolem počátku přejde polohový vektor \vec{r}_a ve vektor $\vec{r}'_a = \vec{r}_a + \vec{\varphi} \times \vec{r}_a$ a podobně se transformují rychlosti $\vec{v}_a \rightarrow \vec{v}_a + \vec{\varphi} \times \vec{v}_a$. Lagrangián se pak změní na

$$L' = L(\vec{r}_a + \vec{\varphi} \times \vec{r}_a, \vec{v}_a + \vec{\varphi} \times \vec{v}_a) = L(\vec{r}_a, \vec{v}_a) + \sum_a \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} \vec{\varphi} \times \vec{r}_a + \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} \vec{\varphi} \times \vec{v}_a \right) + [\text{čvř}], \quad (44)$$

- Má-li být $L' = L$, musí být nulová suma přes a . S využitím identity pro smíšený součin vektorů⁴ $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$ a Lagrangeových rovnic pro všechny částice dostaneme

$$0 = \vec{\varphi} \cdot \sum_a \left(\vec{r}_a \times \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} + \vec{v}_a \times \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} \right) = \vec{\varphi} \cdot \sum_a \left(\vec{r}_a \times \vec{p}_a + \dot{\vec{r}}_a \times \vec{p}_a \right) = \vec{\varphi} \cdot \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (45)$$

kde $\vec{L} = \sum_a \vec{r}_a \times \vec{p}_a$ je *moment hybnosti* soustavy.

- Protože rovnice (45) platí pro pootočení $\vec{\varphi}$ v libovolném směru, musí platit $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$. **Moment hybnosti izolované soustavy se tedy zachovává** a je to důsledek izotropie prostoru.
- Někdy soustava není izolovaná, ale přesto je L invariantní vůči alespoň nějakému otočení. Např. v homogenním gravitačním poli se lagrangián nezmění, otočíme-li soustavu kolem osy rovnoběžné s polem. Pak rovnice (45) platí jen pro $\vec{\varphi}$ ve směru pole a zachovává se tedy jen složka momentu hybnosti v tomto směru.
- Jiným příkladem je pohyb částice (nebo soustavy částic) v centrálním poli. Zde sice opět soustava není izolovaná, ale lagrangián je invariantní vzhledem k otočení soustavy kolem libovolné osy procházející centrem síly. Proto se zachovává moment hybnosti vzhledem k centru, ale nikoli už vzhledem k obecnému bodu.

Teorém Emmy Noetherové

To, že všechny uvedené příklady zákonů zachování nějak souvisely se symetriemi, není náhoda. Existuje důležitý teorém, který roku 1915 zformulovala německá fyzička Emmy Noether a který říká, s každou symetrií lagrangiánu souvisí nějaký zákon zachování. Odvozovat jej zde nebudeme a spokojíme se s výše uvedenými příklady.

1.5 Integrace (řešení) pohybových rovnic v jedné dimenzi

- Uvažujme soustavu s jedním stupněm volnosti, tedy částici vázanou na nějakou křivku, v časově neproměnném potenciálu V . Lagrangeova funkce pak je $L = m\dot{q}^2/2 - V(q)$ a pohybová rovnice je

$$m\ddot{q} = -\frac{dV}{dq}. \quad (46)$$

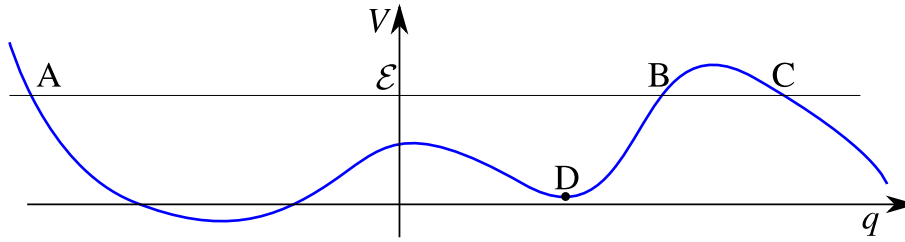
- Řešení této rovnice je pro některé potenciály snadné, ale může být i velmi obtížné. Rovnici nemůžeme v obecném případě přímo integrovat, ale při jejím řešení nám pomůže zachování zobecněné energie, která se zachovává, protože je potenciál v čase neproměnný:

$$E = \mathcal{E} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L = \frac{m}{2} \dot{q}^2 + V(q). \quad (47)$$

Z této rovnice vidíme, že v místech, kde $V(q) = E$, se částice zastaví ($\dot{q} = 0$). Jsou to tzv. **body vratu**, např. u harmonického oscilátoru jsou to dva body odpovídající maximální výchylce z rovnovážné polohy.

- **Příklad:** v potenciálu na obrázku jsou pro vyznačenou energii body vratu A, B, C:

⁴Identitu lze snadno odvodit z vyjádření vektorového součinu pomocí determinantu



- Jestliže je při dané energii pohyb částice omezen jen na konečnou oblast prostoru, říkáme, že pohyb je **finitní**. V opačném případě je **infinitní**.
- Zachování energie nám velice usnadňuje řešení některých úloh. Např. pokud vypustíme tělísko z klidu z bodu A a chceme znát jeho rychlost v bodě D, rovnice (47) nám ji dá okamžitě. Bez její znalosti bychom ale museli integrovat pohybovou rovnici od A do D, což může být obtížné.
- Jak popsat celý pohyb, tedy jak zjistit závislost $q(t)$? Využijeme zákona zachování energie (47), vyjádříme z něj \dot{q} ,

$$\dot{q} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}[E - V(q)]} \quad (48)$$

a provedeme separaci proměnných:

$$dt = \pm \frac{dq}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(q)]}} \Rightarrow t = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dq}{\sqrt{E - V(q)}}. \quad (49)$$

Poslední rovnice, po výpočtu integrálu, dává závislost $t = t(q)$, tedy implicitně i $q = q(t)$, o kterou nám jde. Tato metoda funguje vždy, zatímco přímo pohybovou rovnici (46) umíme řešit jen pro některé potenciály.

- **Příklad: volný pád.** Potenciál je zde $V(x) = mgx$, kde osa x směřuje vzhůru. Příslušnou pohybovou rovnici $m\ddot{x} = -mg$ bychom snadno uměli vyřešit přímo, pro ilustraci naší metody ji ale vyřešme uvedenou separací. Rovnice (49) dá

$$t = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - mgx}} = \mp \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{2}{mg} \sqrt{E - mgx} + t_0 \quad (50)$$

Odtud již dostáváme $x = \frac{E}{mg} - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2$. Přitom $\frac{E}{mg}$ je maximální hodnota x , které částice dosáhne, a t_0 je okamžik, kdy se tak stane.

- **Příklad: harmonický oscilátor.** Potenciál je nyní $V(q) = \frac{k}{2}q^2$ a příslušnou pohybovou rovnici $m\ddot{q} = -kq$ bychom opět snadno uměli vyřešit přímo. Separace pomocí rovnice (49) dá

$$t = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dq}{\sqrt{E - \frac{k}{2}q^2}} = \pm \sqrt{\frac{m}{k}} \int \frac{dq}{\sqrt{q_0^2 - q^2}} = \pm \sqrt{\frac{m}{k}} \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \pm \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin u + t_0 \quad (51)$$

Při výpočtu integrálu jsme označili amplitudu kmitů $q_0 = \sqrt{2E/k}$, zavedli substituci $u = q/q_0$ a integrační konstantu označili t_0 . Invertováním rovnice dostaneme známou závislost výchylky na čase

$$q(t) = q_0 \sin[\omega(t - t_0)], \quad (52)$$

kde úhlová frekvence oscilací $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Znaménko \pm lze absorbovat do integrační konstanty t_0 její vhodnou volbou.

1.6 Pohyb v centrálním poli

- Uvažujme částici o hmotnosti m pohybující se v centrálním poli s centrem v počátku O , tj. v bodě $\vec{r} = 0$. Lagrangián je

$$L = \frac{m}{2} (\dot{\vec{r}})^2 - V(r). \quad (53)$$

- Lagrangián je invariantní vůči otočení systému kolem libovolné osy jdoucí počátkem, proto se zachovává moment hybnosti \vec{L} vzhledem k O
- Moment hybnosti je dán vektorovým součinem $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, vektory \vec{r} , \vec{L} jsou tedy vzájemně kolmé. Vektor \vec{r} je stále kolmý na pevný vektor \vec{L} a proto stále leží v rovině σ kolmé k \vec{L} a procházející počátkem O
- Pohyb částice je tedy rovinný. Zvolme v rovině σ polární souřadnice (r, φ) a zapišme L v nich:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - V(r). \quad (54)$$

- Pohybová rovnice pro φ

$$\frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\varphi}) = 0 \quad (55)$$

vede opět na zákon zachování momentu hybnosti

$$L = mr^2 \dot{\varphi} = \text{const.} \quad (56)$$

(Pozor! Nezaměnit moment hybnosti s lagrangiánem!)

- Z této rovnice můžeme vyjádřit $\dot{\varphi}$:

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{mr^2} \quad (57)$$

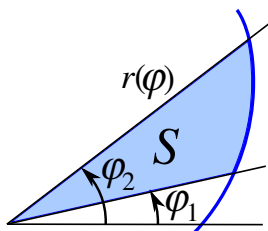
Tuto rovnici lze přepsat a formálně vyřešit separací proměnných, přičemž předpokládáme, že čas se mění od t_1 do t_2 a úhel od φ_1 do φ_2 :

$$dt = \frac{m}{L} r^2 d\varphi \quad \Rightarrow \quad t_2 - t_1 = \frac{m}{L} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi) d\varphi \quad (58)$$

- Abychom našli fyzikální význam integrálu v poslední rovnici, uvažujme plochu, kterou v časovém úseku od t_1 do t_2 opíše polohový vektor částice. Tato plocha je vyjádřena dvojným integrálem z jakobiánu v polárních souřadnicích, tedy

$$S = \int_{\varphi(t_1)}^{\varphi(t_2)} \int_0^{r(\varphi)} r dr d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi) d\varphi, \quad (59)$$

viz obrázek:



Srovnáním rovnic (58) a (59) pak dostáváme vztah $S = (t_2 - t_1)L/2m$. Plocha opsaná polohovým vektorem za určitý čas je tedy tomuto času přímo úměrná – to je **druhý Keplerův zákon**. Jde o přímý důsledek zachování momentu hybnosti a na rozdíl od ostatních dvou Keplerových zákonů platí pro pohyb v libovolném centrálním poli.

Efektivní potenciál

- Pokusíme se nyní využít cykličnosti úhlové proměnné k tomu, abychom se jí nějak zbavili a získali rovnici jen pro r . Za tím účelem vyjádříme zachovávající se energii částice a v ní za $\dot{\varphi}$ dosadíme z rovnice (57):

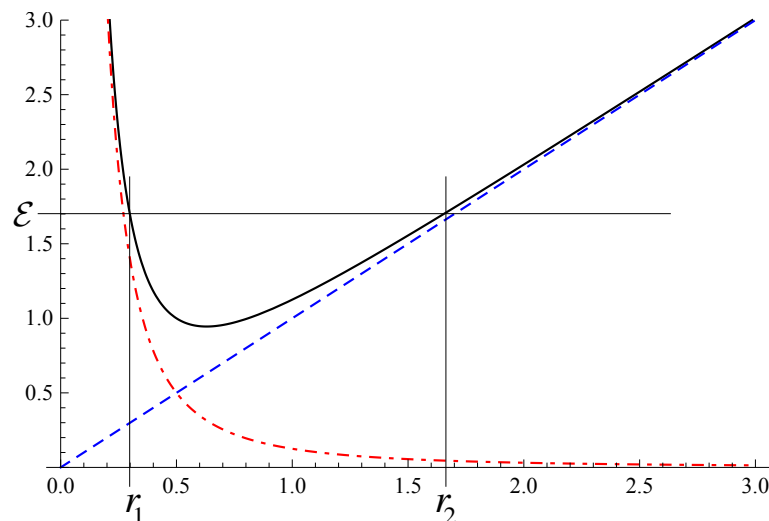
$$E = \text{const.} = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + V(r) = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r), \quad (60)$$

- Je velmi důležité, že $\dot{\varphi}$ dosazujeme do zobecněné energie a nikoli do lagrangiánu. Pokud bychom $\dot{\varphi}$ dosadili do lagrangiánu a snažili bychom se získat pohybovou rovnici z něj, byla by takováto pohybová rovnice nesprávná!
- Jestliže zavedeme tzv. **efektivní potenciál** vztahem

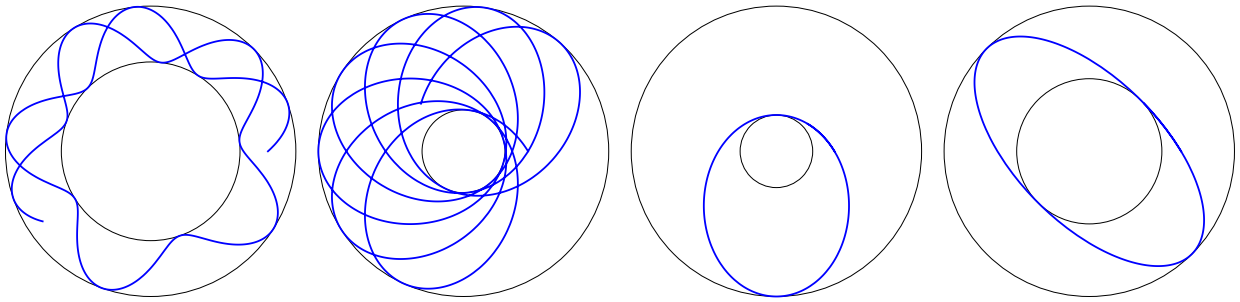
$$V_{\text{ef}} = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r), \quad (61)$$

bude energie jednoduše $E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + V_{\text{ef}}(r)$, takže problém se redukuje na již řešenou úlohu o pohybu částice v jedné dimenzi. Lze tak říci, že radiální pohyb částice v centrálním poli je ekvivalentní pohybu virtuální částice na polopřímce $r \geq 0$ v potenciálu $V_{\text{ef}}(r)$.

- Díky tzv. odstředivému členu $\frac{L^2}{2mr^2}$ v rovnici (61) se v blízkosti $r = 0$ vytvoří bariéra; pokud není potenciál velmi přitažlivý, je tato bariéra nekonečně vysoká a částice tedy nemůže spadnout na přitažlivé centrum. Pokud je ale moment hybnosti roven nule, je člen nulový, bariéra se nevytvoří a částice může na centrum spadnout.
- *Příklad:* Pro lineární potenciál $V(r)$ je na obrázku graf $V(r)$ (modrá čárkovaná), odstředivého členu (červená čerchovaná) a $V_{\text{ef}}(r)$ (černá plná)



- Často je centrální síla přitažlivá a dalekodosahová; tehdy bude existovat bariéra i pro velká r a budou existovat dva body vratu r_1, r_2 jako na obrázku. Virtuální částice pak osciluje mezi r_1 a r_2 , skutečná částice přitom vykonává navíc rotační pohyb. Její trajektorie tak musí ležet v mezikruží daném nerovnicí $r_1 \leq r \leq r_2$. Několik příkladů, jak trajektorie může vypadat, je na obrázku:



- Změně souřadnice r od r_1 do r_2 odpovídá určitá změna úhlu φ , kterou můžeme označit jako $\Delta\varphi(L)$ (viz její výpočet níže, rovnice (64)). Pokud je $\Delta\varphi(L)$ pro daný moment hybnosti L rovno racionálnímu násobku 2π , bude trajektorie částice uzavřená – po určitém počtu oscilací v r se částice vrátí do svého výchozího bodu a začne opisovat znovu stejnou trajektorii. Obecně ale budou trajektorie otevřené a hustě vyplní celé mezikruží.
- Existují ovšem i potenciály $V(r)$, pro které je $\Delta\varphi(L)$ racionální násobek 2π pro libovolné kombinace L a E (přesněji řečeno takové, pro které nastává v r finitní pohyb). Jsou to potenciály $V_N(r) = -\alpha/r$ (Newtonův) a $V_H(r) = \alpha r^2$ (Hookův). Trajektorie v Newtonově a Hookově potenciálu je na třetím a čtvrtém obrázku.
- Pro ještě další potenciály jsou trajektorie uzavřené pro libovolný moment hybnosti při pevné energii. S využitím souvislosti mechaniky a geometrické optiky pak tyto potenciály odpovídají tzv. dokonalým čočkám neboli absolutním optickým instrumentům a je jich nekonečně mnoho.
- Pro výpočet časové závislosti $r = r(t)$ provedeme opět separaci proměnných:

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}[E - V(r)] - \frac{L^2}{m^2 r^2}} \Rightarrow t = \pm \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(r)] - \frac{L^2}{m^2 r^2}}} \quad (62)$$

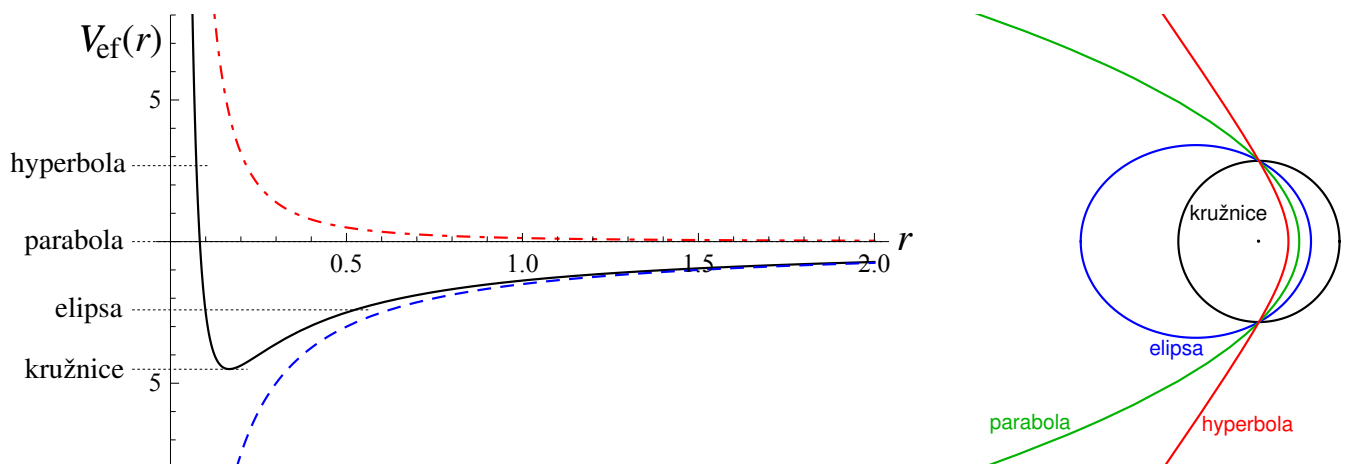
- Často nás zajímá rovnice trajektorie (tj. funkce $r(\varphi)$) spíše než závislost $r(t)$. Pro její výpočet nahradíme čas úhlem pomocí rovnice (57):

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\frac{dr}{dt}}{\frac{d\varphi}{dt}} = \pm \frac{mr^2}{L} \sqrt{\frac{2}{m}[E - V(r)] - \frac{L^2}{m^2 r^2}} \Rightarrow \varphi = \pm \int \frac{L dr}{r^2 \sqrt{2m[E - V(r)] - L^2/r^2}} \quad (63)$$

Odtud již snadno vyjádříme zmíněnou změnu úhlu mezi sousedními body vratu:

$$\Delta\varphi(L) = \int_{r_-}^{r_+} \frac{L dr}{r^2 \sqrt{2m[E - V(r)] - L^2/r^2}} \quad (64)$$

- **Příklad: Keplerova úloha – pohyb v Newtonově potenciálu $V(r) = -\alpha/r$.** Graf efektivního potenciálu pro dané L a odpovídající kuželosečky jsou na obrázku:



Bude nás zajímat tvar trajektorie, dosadíme tedy za $V(r)$ do rovnice (63) a vypočteme integrál:

$$\varphi = \pm \int \frac{Ldr}{r^2 \sqrt{2m[E + \frac{\alpha}{r}] - \frac{L^2}{r^2}}} = \arccos \frac{\frac{L}{r} - \frac{m\alpha}{L}}{\sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{L^2}}} + \varphi_0 \quad (65)$$

Jestliže integrační konstantu zvolíme $\varphi_0 = 0$ a označíme

$$p = \frac{L^2}{m\alpha}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}}, \quad (66)$$

dostaneme rovnici trajektorie ve tvaru

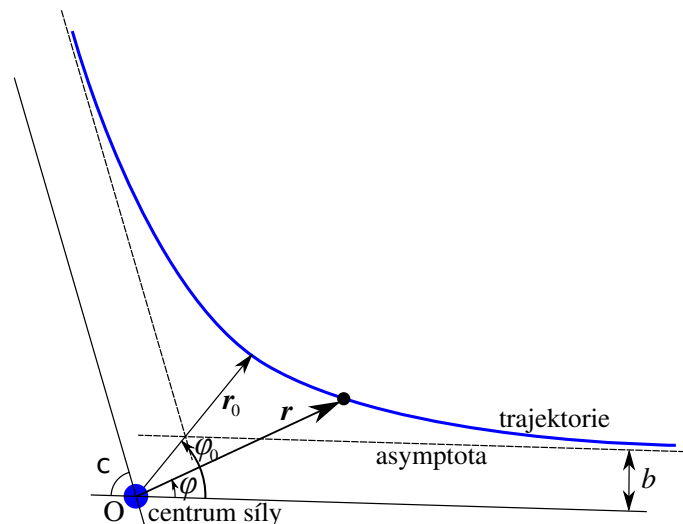
$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}, \quad (67)$$

což je parametrická rovnice kuželosečky s parametrem p a číselnou výstředností (numerickou excentricitou) e . Mohou nastat tyto případy označené i na obrázku (vodorovné čáry značí energie E):

- Pro $E < 0$ je $e < 1$ a jde o **elipsu** (r je konečné pro všechna φ). Nejmenší možná energie (pro dané L) odpovídá $e = 0$ a tedy **kruhové** trajektorii (protože pak $r = p = \text{const.}$).
- Pro $E = 0$ je $e = 1$ a jde o **parabolu** (r je nekonečné pro jedinou hodnotu φ rovnou π).
- Pro $E > 0$ je $e > 1$ a jde o **hyperbolu** (r je nekonečné pro dvě hodnoty φ z intervalu $[0, 2\pi]$).

1.7 Rozptyl

- Co se stane s částicí, která se blíží k silovému centru (např. když E. Rutherford ostřeloval jádra zlata α -částicemi)? Jak se změní její směr?
- Odpověď na to dává teorie rozptylu, navazuje na to, co jsme odvodili v předchozím oddíle



- Označme podle obrázku b tzv. impaktní parametr (tj. vzdálenost, ve které by částice proletěla od centra O , kdyby pole nepůsobilo), r_0 vzdálenost částice od centra při největším přiblížení, v_∞ rychlost ve velké vzdálenosti od centra (tam, kde je silové pole už nepůsobí) a χ rozptylový úhel (tj. úhel, o který se odchýlí trajektorie částice při rozptylu).

- Spočítejme rozptylový úhel:

$$\chi = \pi - 2\varphi_0 = \pi - 2L \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{2m[E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2}]}} \quad (68)$$

- Jestliže dosadíme $L = mv_{\infty}b$ a $E = \frac{m}{2}v_{\infty}^2$ a budeme uvažovat pro konkrétnost odpudivý Coulombův potenciál (jako v případě Rutherfordova rozptylu), dostaneme pro φ_0

$$\varphi_0 = b \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{2\alpha}{mv_{\infty}^2 r} - \frac{b^2}{r^2}}} = \arccos \frac{\frac{\alpha}{mv_{\infty}^2 b}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{mv_{\infty}^2 b}\right)^2}}, \quad (69)$$

odkud vyjádříme b jako

$$b = \frac{\alpha}{mv_{\infty}^2} \cot \frac{\chi}{2} \quad (70)$$

- Označme $d\sigma$ plochu mezikruží kolmého na dopadající svazek částic, kterou když částice projde, rozptýlí se do intervalu úhlů $\langle \chi, \chi + d\chi \rangle$, což odpovídá intervalu impaktních parametrů $\langle b, b + db \rangle$. Ploška $d\sigma$ se nazývá **diferenciální účinný průřez** rozptylu a platí

$$d\sigma = 2\pi b db = 2\pi b \frac{db}{d\chi} d\chi = 2\pi \frac{\alpha^2}{m^2 v_{\infty}^4} \cot \frac{\chi}{2} \frac{d\chi}{2 \sin^2 \frac{\chi}{2}} = \left(\frac{\alpha}{2mv_{\infty}^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\chi}{2}}, \quad (71)$$

kde $d\Omega = 2\pi \sin \chi d\chi = 4\pi \sin \frac{\chi}{2} \cos \frac{\chi}{2} d\chi$ je odpovídající element prostorového úhlu.

1.8 Problém dvou těles (izolovaná dvoučásticová soustava)

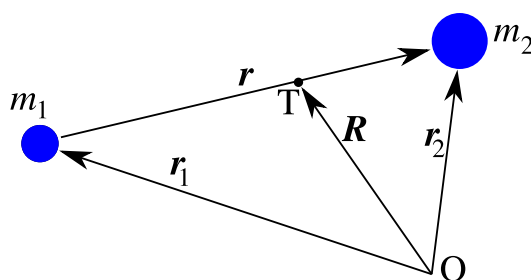
- Uvažujme izolovanou soustavu dvou částic o hmotnostech m_1, m_2 , která na sebe mohou působit. Z homogenity prostoru plyne, že potenciální energie $V(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ může záviset jen na jejich relativní poloze $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Z izotropie prostoru pak plyne, že nemůže záležet na směru vektoru $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$, ale jen na jeho velikosti. Lagrangián proto je

$$L = \frac{m_1}{2} v_1^2 + \frac{m_2}{2} v_2^2 - V(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|). \quad (72)$$

- Pokud bychom nyní sestavili pohybové rovnice pro \vec{r}_1, \vec{r}_2 , byly by provázané a řešily by se nesnadno. Mnohem výhodnější je přejít k nějakým lepším zobecněným souřadnicím. Jak je najít? Už víme, že pohyb hmotného středu T izolované soustavy je velmi jednoduchý. Zvolme proto polohu hmotného středu \vec{R} jako novou vektorovou souřadnici a jako druhou zvolme relativní polohu těles, tedy

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \quad (73)$$

viz obrázek:



- Pomocí \vec{R} , \vec{r} lze vyjádřit původní souřadnice jako

$$\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}, \quad \vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad (74)$$

a dosazením do lagrangiánu dostaneme

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{\vec{R}}^2 + \frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r}), \quad (75)$$

kde $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ je tzv. **redukovaná hmotnost** soustavy.

- Vidíme, že se nám lagrangián rozpadl na součet dvou částí (podobně jako v rovnici (19)), z nichž jedna obsahuje jen \vec{R} a jeho derivace a druhá jen \vec{r} a jeho derivace. Pohyb hmotného středu a relativní pohyb těles jsou proto nezávislé.
- Řešení pro \vec{R} je jednoduché, Lagrangeova rovnice je $\ddot{\vec{R}} = 0$ a hmotný střed tedy koná rovnoměrný přímočarý pohyb – to už jsme věděli.
- Podíváme-li se na část lagrangiánu pro \vec{r} , vidíme, že vypadá stejně jako lagrangián pro pohyb částice o hmotnosti μ v centrálním silovém poli s potenciálem $V(r)$. Tento pohyb již známe.
- *Poznámka k redukované hmotnosti* – i v kvantové fyzice při popisu atomu se objeví redukovaná hmotnost. Protože na ní závisí i energie elektronu v atomu a tím i frekvence spektrálních čar, budou se nepatrně lišit frekvence čar např. atomu vodíku a deuteria, protože se nepatrně liší i redukované hmotnosti.

2 Hamiltonova formulace mechaniky

2.1 Hamiltonovy rovnice

- V Lagrangeových rovnicích byly základními proměnnými zobecněné souřadnice q_i a rychlosti \dot{q}_i . Kromě toho jsme zavedli zobecněné hybnosti $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, ale s nimi jsme toho zatím mnoho neprováděli
- Hamiltonova formulace mechaniky pracuje s q_i, p_i namísto q_i, \dot{q}_i . Přechod se provede následovně. Zavedeme tzv. Hamiltonovu funkci obdobně jako předtím zobecněnou energii, ale jako funkci nových proměnných q_i, p_i :

$$H(q_i, p_i, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L \quad (76)$$

Přitom rychlosti zde vystupující musíme vyjádřit pomocí q_k a p_k , tedy jako $\dot{q}_i = \dot{q}_i(q_k, p_k, t)$ s pomocí definičních rovnic $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$.

- *Příklad: Hamiltonián pro částici v rovině v poli centrální síly*

Lagrangián:

$$L(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - V(r) \quad (77)$$

Zavedeme zobecněné hybnosti, vyjádříme zobecněné rychlosti pomocí hybností a souřadnic

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} & \Rightarrow & \dot{r} = \frac{p_r}{m} \\ p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} & \Rightarrow & \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2} \end{aligned} \quad (78)$$

a vypočítáme hamiltonián:

$$H(r, \varphi, p_r, p_\varphi) = p_r \dot{r} + p_\varphi \dot{\varphi} - L = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + V(r) \quad (79)$$

- *Příklad: Hamiltonián částice v elektromagnetickém poli*

Lagrangián:

$$L(\vec{r}, \vec{v}) = \frac{m\vec{v}^2}{2} + e\vec{A}\vec{v} - \varphi(r), \quad (80)$$

kde e , \vec{A} a φ je elektrický náboj částice a vektorový a skalární potenciál. Pro zobecněnou hybnost a hamiltonián pak dostaneme

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} + e\vec{A}, \quad H = \frac{(p - e\vec{A})^2}{2m} + \varphi. \quad (81)$$

- Zkusme spočítat parciální derivace H podle souřadnice a hybnosti pro systém s jedním stupněm volnosti (pro jednoduchost). Abychom to udělali správně, musíme explicitně vyjádřit H jako funkci souřadnice a hybnosti:

$$H(q, p, t) = p\dot{q}(q, p, t) - L(q, \dot{q}(q, p, t), t) \quad (82)$$

a pak provést derivace:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q} &= p \frac{\partial \dot{q}(q, p, t)}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}(q, p, t)}{\partial q} = -\frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = -\dot{p} \\ \frac{\partial H}{\partial p} &= \dot{q}(q, p, t) + p \frac{\partial \dot{q}(q, p, t)}{\partial p} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}(q, p, t)}{\partial p} = \dot{q} \end{aligned} \quad (83)$$

- Zapišme tyto rovnice naopak a obecně pro systém s více stupni volnosti:

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned} \quad (84)$$

To jsou Hamiltonovy (kanonické) rovnice. Jsou ekvivalentní Lagrangeovým rovnicím. Je jich dvakrát více, ale jsou pouze prvního řádu, zatímco Lagrangeovy rovnice jsou řádu druhého. Hamiltonovy rovnice lépe vystihují určitou symetrii mezi souřadnicemi a hybnostmi, která mezi souřadnicemi a rychlostmi chybí

- Hamiltonovy rovnice umožňují z počátečních podmínek, tedy ze souboru hodnot $q_i(t_0) = q_{i,0}$, $p_i(t_0) = p_{i,0}$, získat celý časový vývoj systému, tedy závislost $q_i(t)$, $p_i(t)$, a to jak to budoucnosti ($t > t_0$), tak do minulosti ($t < t_0$)

- *Příklad: Pohyb částice v jedné dimenzi v homogenním gravitačním poli*

Zobecněnou souřadnici označíme x , orientujeme ji proti směru pole (vzhůru). Z lagrangiánu $L = \frac{1}{2}mx^2 - mgx$ získáme hamiltonián $H = p^2/(2m) + mgx$ a Hamiltonovy rovnice

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -mg. \quad (85)$$

Řešit tuto soustavu diferenciálních rovnic začneme od druhé rovnice, která dá $p(t) = -mgt + C_1$. Dosazením do první rovnice a integrací dostaneme $x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1t/m + C_2$. S využitím počátečních podmínek $x(0) = x_0$, $p(0) = p_0$ dostaneme $C_1 = p_0$, $C_2 = x_0$ a konečně

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{p_0t}{m} + x_0 \\ p(t) &= -mgt + p_0 \end{aligned} \quad (86)$$

Zachování Hamiltonovy funkce

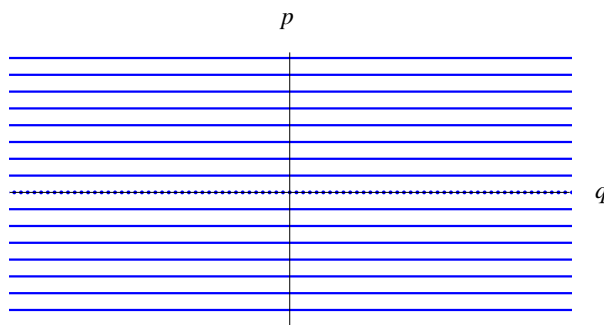
Spočítejme ještě úplnou časovou derivaci Hamiltoniánu:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (87)$$

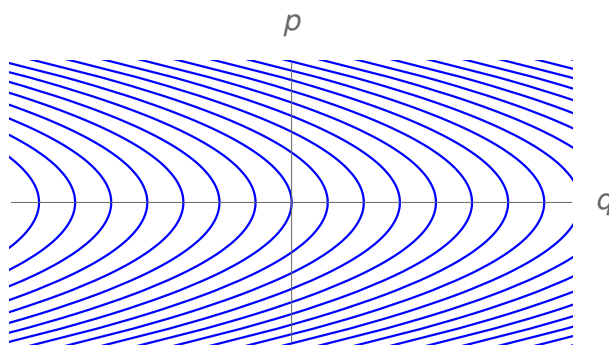
Zde jsme využili Hamiltonových rovnic (84), díky nimž se vynulovala závorka. Vidíme, že **jestliže hamiltonián nezávisí explicitně na čase** (tj. $\partial H/\partial t = 0$), **pak se zachovává** (tj. $dH/dt = 0$). To je podobné tomu, co jsme zjistili dříve – jestliže Lagrangián nezávisí explicitně na čase, pak se zachovává zobecněná energie.

2.2 Fázový prostor

- Stav mechanického systému s n stupni volnosti v daném okamžiku t je úplně popsán souborem okamžitých hodnot zobecněných souřadnic a rychlostí, tedy souborem hodnot $q_1(t), \dots, q_n(t), p_1(t), \dots, p_n(t)$
- **Fázový prostor** systému definujeme jako prostor jeho stavů. Pro systém s n stupni volnosti je to tedy abstraktní prostor dimenze $2n$, na jehož souřadnicové osy vynášíme všechny souřadnice a hybnosti, tj. $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$. Pro systém s jedním stupněm volnosti je fázovým prostorem rovina (q, p) .
- Pohyb systému je pak popsán časovým vývojem $q_i(t), p_i(t)$ a tomu ve fázovém prostoru odpovídá pohyb fázového bodu.
- **Příklad: Fázové trajektorie pro volnou částici**
Uvažujme volnou částici jen v jedné dimenzi (vykonává jednorozměrný pohyb po přímce q). Hamiltonián je pak $H(q, p) = \frac{p^2}{2m}$ a Hamiltonovy rovnice dají $\dot{p} = -\partial H/\partial q = 0$ a $\dot{q} = \partial H/\partial p = p/m$. Jejich řešení je $p(t) = p_0 = \text{konst.}$ a $q(t) = p_0 t/m + q_0$, kde q_0 a p_0 jsou hodnoty souřadnice a hybnosti v čase $t = 0$. Fázové trajektorie proto budou přímky rovnoběžné s osou q , jen pro $p = 0$ budou trajektoriemi izolované body, protože tehdy se nemění nejen p , ale ani q , viz obrázek:



- **Příklad: Fázové trajektorie pro částici v homogenním gravitačním poli**
Jak dopadnou fázové trajektorie pro částici pohybující se v jedné dimenzi (po svislé přímce) v homogenním gravitačním poli? Pohybové rovnice i jejich řešení už máme, viz rovnice (85) a (86). Pro zvolený bod (q_0, p_0) fázového prostoru pak vyneseme parametricky vyjádřené křivky $(q(t), p(t))$, parametrem je čas. Výsledek je takovýto:



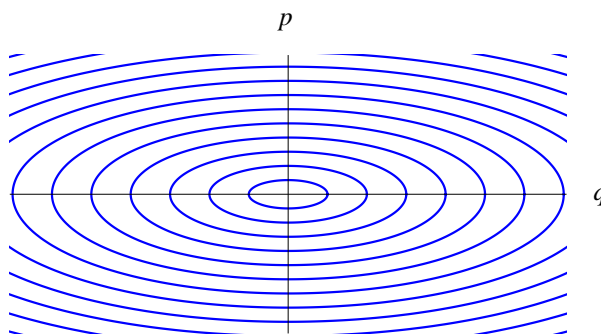
Je zajímavé, že pro nalezení samotného *tvaru* fázových trajektorií (tj. bez ohledu na časovou parametrizaci) systému s jedním stupněm volnosti není nutné řešit pohybové rovnice, což je možná poněkud překvapivé. To proto, že Hamiltonova funkce se zachovává (protože nezávisí explicitně na čase) a rovnici $H(q, p) = E = \text{const.}$ tedy můžeme pro danou hodnotu E chápat jako implicitní rovnici fázové trajektorie. Trajektorie jsou proto v našem případě dány rovnicí $\frac{p^2}{2m} + mgq = E$, což, jak se lze snadno přesvědčit, popisuje přesně stejný systém parabol jako výše uvedené parametrické vyjádření.

- **Příklad: Fázové trajektorie pro harmonický oscilátor**

Uvažujme harmonický oscilátor s hamiltoniánem $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$. Pro nalezení tvaru fázových trajektorií využijeme opět rovnici $H(q, p) = E = \text{const.}$, která dá

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 = E,$$

což jsou rovnice elips. Na obrázku jsou zobrazeny fázové trajektorie pro rovnoměrně narůstající amplitudu kmitů (a tedy kvadraticky narůstající energii):



- **Příklad: Fázové trajektorie pro matematické kyvadlo**

Uvažujme částici o hmotnosti m zavěšenou na vlákně o délce a , které může kývat v rovině. Lagrangián a Hamiltonián jsou

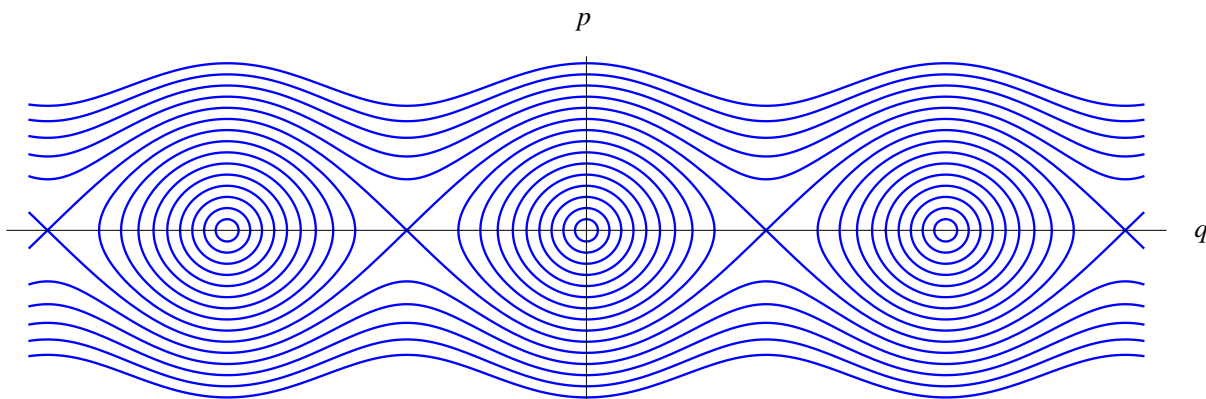
$$L = \frac{ma^2\dot{\phi}^2}{2} + mga \cos \phi, \quad (88)$$

$$H = \frac{l^2}{2ma^2} - mga \cos \phi, \quad (89)$$

kde jsme zobecněnou hybnost označili l , protože jde o moment hybnosti. Tvar fázových trajektorií pak opět plyne z rovnice $H = E = \text{const.}$, která nám dá

$$l = \pm \sqrt{2ma^2(E + mga \cos \phi)} \quad (90)$$

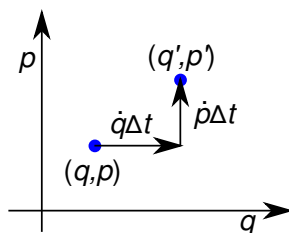
a pro různé hodnoty E jsou vykresleny na obrázku:



Všimněte si, že některé trajektorie jsou uzavřené, jiné otevřené. Uzavřené odpovídají nižším energiím a kývavému pohybu, kdy částice nedosahuje bodu $\phi = \pi$. Otevřené trajektorie pak odpovídají tomu, že částice obíhá stále jedním směrem, moment hybnosti nemění znaménko a úhel ϕ neustále narůstá. Trajektorie, která odděluje oba typy pohybů, se nazývá **separatriska**. To, že se větví, není problém. Pokud se po ní totiž fázový bod pohybuje, trvá mu nekonečně dlouho, než do bodu větvení dojde, a nemusí tedy řešit dilema, po které větvi se dále vydat.

2.3 Liouvillova věta

- Uvažujme mechanický systém, jehož souřadnice a hybnosti se nějak mění s časem. Ve fázovém prostoru tomu odpovídá pohyb fázového bodu reprezentujícího stav systému. Pro jednoduchost uvažujme systém s jedním stupněm volnosti
- Přestavme si nyní ne jeden, ale obrovské množství (ansámbl) identických systémů, které ale mají různé počáteční podmínky. Můžeme si představit, že počáteční podmínky jsou takové, že příslušné body vyplňují určitou souvislou plošku S ve fázovém prostoru.
- Nechme nyní systémy po velmi krátkou dobu Δt vyvíjet v čase a podívejme se, jak se během ní změní naše ploška; její novou velikost označme S' . Je-li ploška S původně lokalizována kolem bodu (q, p) , je ploška S' lokalizována kolem bodu $(q', p') = (q + \dot{q} \Delta t, p + \dot{p} \Delta t) = (q + \frac{\partial H}{\partial p} \Delta t, p - \frac{\partial H}{\partial q} \Delta t)$, viz obrázek:



- Poměr velikostí obou plošek je dán jakobiánem transformace $(q, p) \rightarrow (q', p')$:

$$\begin{aligned} \frac{S'}{S} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial q'}{\partial q} & \frac{\partial p'}{\partial q} \\ \frac{\partial q'}{\partial p} & \frac{\partial p'}{\partial p} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} \Delta t + [\text{čvř}] & -\frac{\partial^2 H}{\partial q^2} \Delta t + [\text{čvř}] \\ \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} \Delta t + [\text{čvř}] & 1 - \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} \Delta t + [\text{čvř}] \end{vmatrix} \\ &= 1 + \left[\frac{\partial^2 H}{\partial q^2} \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} - \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} \right)^2 \right] (\Delta t)^2 + [\text{čvř}] \end{aligned} \quad (91)$$

Zde [čvř] značí členy druhého a vyššího řádu v Δt . Všimněte si, že člen lineární v Δt se vyrušil díky záměnnosti parciálních derivací. Toto je klíčové. Pokud by lineární člen zůstal, velikost plošky by se obecně měnila. Pokud ale provedeme limitu pro $\Delta t \rightarrow 0$, jde změna plošky k nule rychleji než

samotné Δt a tedy v limitě se nemění. Lze to ukázat rigorózně následovně. Vypočítejme poměr změny plošky a změny času za využití rovnice (91):

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S' - S}{\Delta t} = SA \Delta t + [\text{čvř}]. \quad (92)$$

Zde jsme symbolem A jsme označili hranatou závorku v rovnici (91). V limitě $\Delta t \rightarrow 0$ pak levá strana rovnice (93) přejde v derivaci $\frac{dS}{dt}$ a pravá strana v nulu, proto $\frac{dS}{dt} = 0$.

- Vidíme tedy, že během pohybu se sice může měnit tvar námi uvažované plošky, ale nemění se její velikost. To platí i v případě více stupňů volnosti soustavy, kdy má fázový prostor více dimenzí – opět se zachovává fázový objem. To je obsahem **Liouvillovy věty**.
- V uvedeném odvození jsme počítali změnu velikosti plošky během velmi krátkého časového intervalu. Vzhledem k poznatku, že $\frac{dS}{dt} = 0$, to ale platí i pro libovolně dlouhé časové úseky a velikost plošky tak zachovává stále.
- *Zachování fázového objemu při pohybu částice v homogenním gravitačním poli*
Vezměme situaci z posledního příkladu v podkapitole 2.1. Jakobián pro přechod od (x_0, p_0) k $(x(t), p(t))$ vytvoříme s pomocí rovnic (86):

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x(t)}{\partial x_0} & \frac{\partial p(t)}{\partial x_0} \\ \frac{\partial x(t)}{\partial p_0} & \frac{\partial p(t)}{\partial p_0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{t}{m} & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad (93)$$

a vidíme, že je skutečně roven jedné.

- Podobně se fázový objem zachovává i při kanonických transformacích (o nichž bude řeč dále), protože, jak lze ukázat, jakobián libovolné kanonické transformace je roven jedné.

2.4 Kanonické transformace

- Uvažujme mechanickou soustavu se zobecněnými souřadnicemi q_1, \dots, q_n . Příslušné zobecněné hybnosti pak jsou $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ a z lagrangiánu odvodíme hamiltonián $H(q_i, p_i, t)$ podle rovnice (76). Představme si nyní, že místo souřadnic q_1, \dots, q_n zvolíme jiné, které označíme Q_1, \dots, Q_n . Příslušné zobecněné hybnosti pak jsou $P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}$ hamiltonián bude $H'(Q_i, P_i, t)$. Je tedy vidět, že výběr souřadnic a hybností pro daný problém není jednoznačný, na druhou stranu jsou ale souřadnice a hybnosti provázány a nejsou nezávislé. Přechod od (q_i, p_i) k (Q_i, P_i) je speciálním případem tzv. **kanonické transformace**
- V Hamiltonově formalismu vystupují souřadnice a hybnosti jako samostatné proměnné, takže si lze představit obecnější transformaci

$$Q_i = Q_i(q_k, p_k, t), \quad P_i = P_i(q_k, p_k, t) \quad (94)$$

- Mezi takovými transformacemi nás budou zajímat ty, které zachovávají tvar Hamiltonových rovnic. A právě to jsou kanonické transformace.
- Jak je najdeme? Napíšeme akci vyjádřenou v původních i nových souřadnicích pomocí hamiltoniánu takto:

$$S = \int L dt = \int (p\dot{q} - H) dt = \int (p dq - H dt) \quad (95)$$

$$S' = \int L dt = \int (P\dot{Q} - H') dt = \int (P dQ - H' dt) \quad (96)$$

(pro jednoduchost předpokládáme, že systém má jen jeden stupeň volnosti).

- Budou-li se diferenciály obou akcí lišit o úplný diferenciál, budou se obě akce lišit o konstantu, proto budou nabývat minima pro tutéž trajektorii a pohyb popsany oběma sadami souřadnic a hybností bude stejný. Musí tedy platit

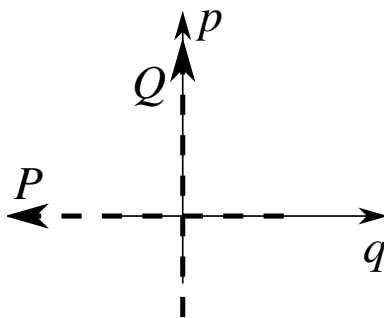
$$p dq - P dQ + (H' - H) dt = dF \quad (97)$$

- Předpokládejme nyní, že F je funkcí „staré“ a „nové“ souřadnice a času, $F = F(q, Q, t)$. Diferencováním $dF(q, Q, t) = \frac{\partial F}{\partial q} dq + \frac{\partial F}{\partial Q} dQ + \frac{\partial F}{\partial t} dt$ a srovnáním s (97) dostaneme

$$p = \frac{\partial F}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial F}{\partial Q}, \quad H' = H + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (98)$$

Funkce F se nazývá **vytvořující funkce** kanonické transformace

- **Příklad:** Vezměme vytvořující funkci ve tvaru $F = qQ$. Pak z (98) dostaneme $p = Q, P = -q, H' = H$. Vidíme tedy, že nová souřadnice je rovna staré hybnosti a nová hybnost je mínus stará souřadnice. Tato kanonická transformace je vlastně pootočením fázového prostoru o $\pi/2$, při níž si vymění role souřadnice a hybnost (viz obrázek):



- Místo vyjádření vytvořující funkce pomocí q, Q, t může být výhodné ji vyjádřit jako funkci např. q, P, t . To provedeme tak, že na obě strany rovnice (97) přidáme diferenciál $d(PQ) = P dQ + Q dP$:

$$d(F + PQ) = p dq + Q dP + (H' - H) dt, \quad (99)$$

výraz $F + PQ$ chápeme jako novou vytvořující funkci $\Phi(q, P, t)$ a stejným postupem jako předtím dostaneme

$$p = \frac{\partial \Phi}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial \Phi}{\partial P}, \quad H' = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (100)$$

To, co jsme provedli, je Legendrova transformace – totéž, co děláme např. v termodynamice při přechodu od vnitřní energie $dE = T dS - p dV$ k volné energii $dF = -S dT - p dV$ nebo entalpii $dH = T dS + V dp$ atd.

- **Příklad:** Vezměme vytvořující funkci ve tvaru $\Phi = kqP$, kde k je konstanta. Pak z (100) dostaneme $p = kP, Q = kq, H' = H$ neboli $Q = kq, P = \frac{p}{k}$. Vidíme, že souřadnice se k -krát natáhla, zatímco hybnost se k -krát zkrátila. Jde o tzv. stlačovací transformaci fázového prostoru. Všimněme si, že se při ní nemění plocha ve fázovém prostoru, protože stlačení v jednom směru přesně vykompenzuje natažení ve druhém směru.
- **Příklad:** transformaci z předchozího příkladu aplikujeme na harmonický oscilátor s hamiltoniánem $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$ pro vhodně zvolené k tak, aby výsledný hamiltonián byl co nejjednodušší. Zvolme $k = \sqrt{m\omega}$. Dostáváme pak $H'(P, Q) = \frac{\omega}{2}(P^2 + Q^2)$, což vede na jednoduché pohybové rovnice $\dot{Q} = \omega P$ a $\dot{P} = -\omega Q$. Fázovými trajektoriemi v rovině Q, P jsou kružnice.
- Kanonické transformace lze skládat, invertovat atd., proto tvoří grupu. Mají pozoruhodné vlastnosti, které jsou velmi užitečné jak v klasické, tak kvantové mechanice.

- Speciálním případem kanonické transformace je samotný pohyb, tedy přechod od počátečních podmínek $(q_i(0) = q_{i,0}, p_i(0) = p_{i,0})$ k $(q_i(t), p_i(t))$ nebo spíše naopak. Vytvořující funkcí je v tomto případě akce.

2.5 Poissonovy závorky

- Počítejme rychlost změny nějaké veličiny A , která je funkcí stavu systému, tedy funkcí zobecněných souřadnic a hybností:

$$\frac{dA(q_i, p_i, t)}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial A}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = \frac{\partial A}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial A}{\partial t} + \{A, H\} \quad (101)$$

kde jsme zadefinovali tzv. Poissonovy závorky veličin A, B vztahem

$$\{A, B\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right). \quad (102)$$

- Je-li A veličina explicitně nezávislá na čase, pak se zachovává, pokud je její Poissonova závorka s hamiltoniánem rovna nule.
- Poissonovy závorky mají řadu zajímavých vlastností, které lze dokázat z definice (102):

$$\{A, B\} = -\{B, A\} \quad \text{/antisymetrie}$$

$$\{A, A\} = 0$$

$$\{A + B, C\} = \{A, C\} + \{B, C\} \quad \text{(distributivita)}$$

$$\{AB, C\} = A\{B, C\} + B\{A, C\}$$

$$\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0 \quad \text{(Jacobiho identita)} \quad (103)$$

$$\{q_i, p_k\} = \delta_{ik} \quad (104)$$

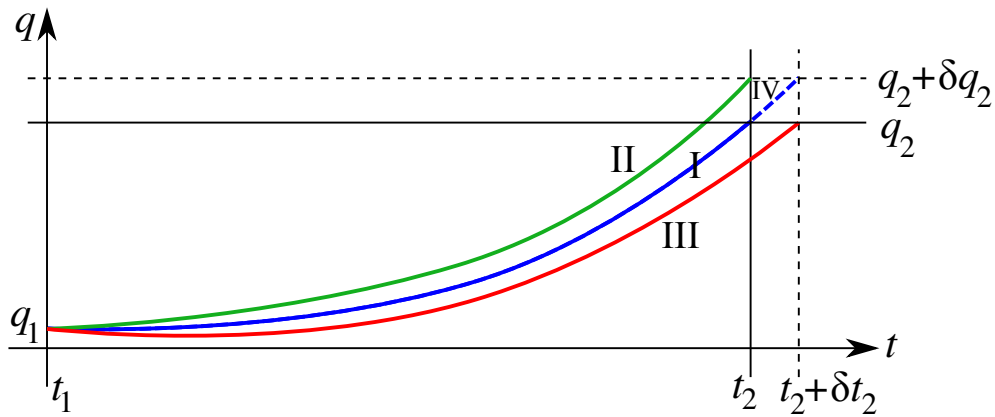
Zde δ_{ik} značí Kroneckerovo delta, které je rovno jedné pro $i = k$ a nule pro $i \neq k$.

- Předpokládejme, že máme dvě veličiny A, B , které jsou integrály pohybu. Pak z Jacobiho identity (103) pro $C = H$ plyne, že i veličina $\{A, B\}$ je integrálem pohybu.
- Poissonovy závorky mají velký význam při přechodu ke kvantové mechanice. Tam jim, až na faktor $i\hbar$, odpovídá komutátor veličin (přesněji jejich operátorů)
- Lze ukázat, že podmínku pro to, aby transformace $Q_i = Q_i(q_k, p_k, t), P_i = P_i(q_k, p_k, t)$ byla kanonická, lze formulovat i tak, že Poissonovy závorky nových veličin Q_i, P_i musí splňovat relace podobné (104), tedy $\{Q_i, P_k\} = \delta_{ik}$.

3 Úvod do Hamiltonovy-Jacobiho rovnice

- Uvažujme systém, jehož souřadnice na počátku ($t = t_1$) a na konci ($t = t_2$) jsou pevně dány hodnotami q_1 a q_2 . Systém bude konat pohyb odpovídající minimální akci pro tyto dané okrajové podmínky (viz modrá plná trajektorie I na obrázku). Nyní si představme, že poněkud změním koncovou souřadnici z hodnoty q_2 na hodnotu $q_2 + \delta q_2$. Tím se změní celá trajektorie (na obrázku zelená trajektorie II), protože systém nyní musí v čase t_2 dospět nikoli do bodu q_2 , ale do posunutého bodu $q_2 + \delta q_2$. Jak se přitom změní akce? Takto:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt \quad (105)$$



S využitím Lagrangeovy rovnice přepíšeme první člen a dostaneme

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \delta q \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) dt = [p \delta q]_{t_1}^{t_2} = p(t_2) \delta q_2, \quad (106)$$

protože změnu souřadnice v čase t_1 jsme nepředpokládali. Dostáváme tedy důležitou rovnost

$$\frac{\partial S}{\partial q_2} = p_2 \quad (107)$$

- Nyní si představíme, že neměníme q_2 , ale naopak změňíme okamžik t_2 , ve kterém má souřadnice do bodu q_2 dospět, na hodnotu $t_2 + \delta t_2$. Tomu bude opět odpovídat změna celé trajektorie (na obrázku červená trajektorie III). Odpovídající změna akce bude $\frac{\partial S}{\partial t_2} \delta t_2$.
- Nakonec si představme, že změňíme obojí: jak q_2 na $q_2 + \delta q_2$, tak t_2 na $t_2 + \delta t_2$, a to tak, aby se v časovém úseku $[t_1, t_2]$ trajektorie nezměnila (na obrázku tomu odpovídá celá modrá trajektorie složená z plného úseku I a čárkovaného úseku IV). Veličiny δx_2 a δt_2 proto musejí být svázány vztahem $\delta q_2 = \dot{q}_2 \delta t_2$, kde \dot{q}_2 je rychlost v okamžiku t_2 . Změnu akce nyní můžeme vyjádřit jako součet změn odpovídající oběma jednotlivým změnám popsáním výše:

$$\delta S = p_2 \delta q_2 + \frac{\partial S}{\partial t_2} \delta t_2 = p_2 \dot{q}_2 \delta t_2 + \frac{\partial S}{\partial t_2} \delta t_2 \quad (108)$$

Vzhledem k tomu, že se obě dráhy liší jen o úsek IV, je změna akce současně rovna akci odpovídající jen tomuto úseku IV, tedy (pro malé δt_2) $\delta S = L(t_2) \delta t_2$ ze samotné definice akce. Srovnáním obou vyjádření δS dostaneme

$$\frac{\partial S}{\partial t_2} = L - p_2 \dot{q}_2 = -H(t_2) \quad (109)$$

Tato rovnost vyjadřuje, že změna akce při samotné změně koncového času (beze změny koncové souřadnice) je dána záporně vzatou Hamiltonovou funkcí.

- Zanecháme-li nyní index 2, můžeme rovnici (109) přepsat jako rovnici

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H \left(q, \frac{\partial S}{\partial q} \right), \quad (110)$$

kde jsme dosadili hybnost z (107). Pro více stupňů volnosti a s vypsáním všech závislostí by měla tvar

$$\frac{\partial S(q_1, \dots, q_n, t)}{\partial t} = -H \left(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial S(q_1, \dots, q_n, t)}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S(q_1, \dots, q_n, t)}{\partial q_n}, t \right), \quad (111)$$

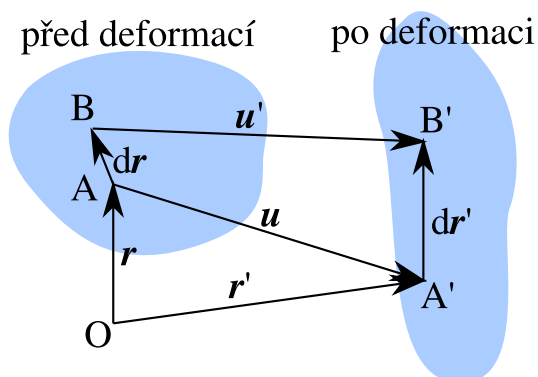
Rovnice (111) je slavná Hamiltonova-Jacobiho rovnice. Je to parciální diferenciální rovnice prvního řádu a poskytuje nejobecnější metodu řešení pohybových rovnic. Jejím řešením pro známý hamiltonián je akce jako funkce souřadnic a času, která ovšem ještě závisí na obecné funkci či na $n + 1$ konstantách. K nalezení samotného pohybu, tedy funkcí $q_i(t)$, je ale ještě třeba určité procedury, kterou není čas se v tomto kurzu zabývat.

- Hamiltonova-Jacobiho rovnice poskytuje nejobecnější metodu řešení pohybových rovnic a nejmocnější nástroj popisu mechanických systémů. Lze pomocí ní rovněž přejít od klasické mechaniky ke kvantové mechanice nebo vlnové optice.

4 Teorie pružnosti

4.1 Tenzor deformace

- Tuhé těleso se vyznačuje tím, že jednotlivé jeho části jsou vůči sobě v pevných vzdálenostech. V tělese, které takovouto vlastnost nemá, se jeho jednotlivé body mohou k sobě přibližovat nebo od sebe vzdalovat. Takováto tělesa budeme nyní zkoumat.
- Změní-li se vzdálenosti bodů tělesa, těleso se **deformuje**. Deformaci lze kvantitativně popsat následujícím způsobem. Uvažujme dva velmi (infinitesimalně) blízké body A, B v tělese před deformací (viz obrázek). Polohový vektor bodu A označíme \vec{r} a relativní polohu bodu B vzhledem k A jako \vec{dr} .



- Při deformaci se body A a B posunou do nových poloh A', B'. Označme příslušná posunutí jako \vec{u}, \vec{u}' . Pak platí

$$d\vec{r}' = d\vec{r} + \vec{u}' - \vec{u} = d\vec{r} + d\vec{u} \quad (112)$$

- To, co nás bude zajímat, je změna vzdálenosti obou bodů při deformaci. Pro její výpočet rozvineme vektor \vec{u}' jako funkci polohy do Taylorovy řady a ponecháme členy do prvního řádu:

$$\vec{u}' = \vec{u} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_k} dx_k \quad \Rightarrow \quad d\vec{u} = \vec{u}' - \vec{u} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_k} dx_k, \quad (113)$$

přičemž x_k jsou opět složky polohového vektoru \vec{r} .

- Kvadrát nové vzdálenosti je pak

$$dr'^2 = (d\vec{r} + d\vec{u})^2 = dr^2 + 2d\vec{r}d\vec{u} + du^2 = dr^2 + 2 \sum_{i,k=1}^3 dx_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k + \sum_{i,k,l=1}^3 \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} dx_i dx_k \quad (114)$$

- V prostředním členu nyní využijeme toho, že nezáleží na označení indexů, přes které sčítáme, v tomto případě tedy toho, že $\sum_{i,k=1}^3 dx_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k = \sum_{i,k=1}^3 dx_k \frac{\partial u_k}{\partial x_i} dx_i$. Jednu sumu ve členu s dvojkou takto nahradíme, druhou ponecháme a dostaneme

$$dr'^2 = dr^2 + 2 \sum_{i,k=1}^3 \varepsilon_{ik} dx_i dx_k, \quad (115)$$

kde

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \sum_{l=1}^3 \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \quad (116)$$

jsou složky **tenzoru deformace** $\hat{\varepsilon}$.

- Tensor deformace je symetrický, jak je zřejmé z rovnice (116). Jedná se o **bezrozměrnou** veličinu.
- Tensor deformace úplně popisuje změny vzdáleností blízkých bodů v tělese. Je to tenzorové pole, protože deformace je funkcí polohy v rámci tělesa. Je-li $\hat{\varepsilon}$ znám pro celý objem tělesa, je tím deformace zcela určena.
- Tensor deformace nevystihuje translační přemístění tělesa (položíme-li vektor posunutí roven konstantě, vidíme z rovnice (116), že $\varepsilon_{ik} = 0$), ani rotační přemístění (to je zřejmé méně a souvisí to s krokem, který jsme před chvílí provedli se záměnou sčítacích indexů, tedy se symetrizací tenzoru; bez tohoto kroku by byly složky ε_{ik} nenulové i při pouhém potočení tělesa jako celku).
- Je-li deformace malá, jsou malé parciální derivace $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ (i když samotná posunutí malá být nemusí). Tehdy lze zanedbat kvadratický člen v (116) a napsat

$$\varepsilon_{ik} \approx e_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right), \quad (117)$$

kde e_{ik} nazýváme **tenzorem malých deformací**

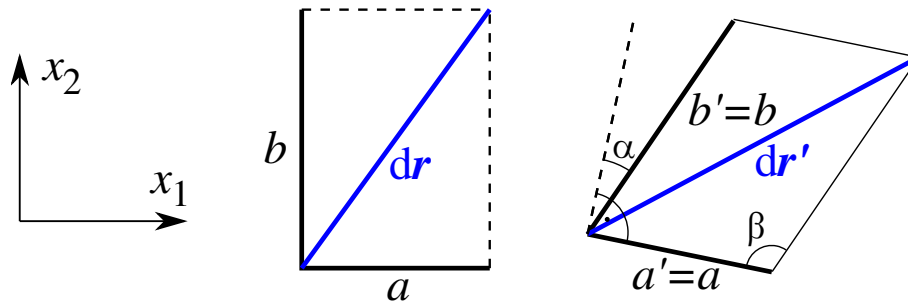
- Jaký je význam jednotlivých složek tenzoru deformace? Předpokládejme nejprve, že body A, B jsou umístěny tak, že vektor $d\vec{r}$ má směr souřadnicové osy x_j , tedy např. pro $j = 2$ by bylo $d\vec{r} = (0, dr, 0)$. Pak ve dvojitě sumě v rovnici (115) bude nenulový jediný člen, a to s $i = k = j$ a dostáváme

$$dr'^2 = dr^2 + 2\varepsilon_{jj} dr^2 \quad \Rightarrow \quad dr' = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{jj}} dr \approx (1 + \varepsilon_{jj}) dr, \quad (118)$$

kde poslední rovnost platí pro $\varepsilon_{jj} \ll 1$, tedy pro malou deformaci. Složka ε_{jj} je tedy vlastně **relativním prodloužením** elementu osy x_i při deformaci, protože

$$\text{relativní prodloužení} = \frac{dr' - dr}{dr} = \varepsilon_{jj} \quad (119)$$

- Diagonální složky tenzoru deformace v daném bodě tedy vyjadřují relativní prodloužení (jsou-li záporné, jedná se o **zkrácení**) infinitezimální části tělesa ve směrech souřadnicových os. Co vyjadřují nediagonální složky?
- Abychom to zjistili, uvažujme malou deformaci takovou, při níž jsou nenulové jen složky $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$ a zvolme vektor $d\vec{r} = (a, b, 0)$ (viz obrázek):



- Pak platí

$$dr'^2 = dr^2 + 4\varepsilon_{12}ab = a^2 + b^2 + 4\varepsilon_{12}ab \quad (120)$$

Vzhledem k nulovosti diagonálních složek tenzoru deformace se délka úsečky a ve směru osy x_1 a úsečky b ve směru osy x_2 nezměnila. Označíme-li úhel mezi těmito úsečkami po deformaci jako β , z kosinové věty dostaneme

$$dr'^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta \quad (121)$$

a z rovnic (120) a (121) pak plyne $2\varepsilon_{12} = -\cos \beta = -\cos(\pi/2 + \alpha) = \sin \alpha$, kde α je odklon nové úsečky a' od kolmice k úsečce b' (viz obrázek).

- Nediagonální složky tenzoru deformace tedy určují, jak se při deformaci změní úhly mezi souřadnicovými osami a popisují tak **smykovou deformaci**.
- Jaká je změna objemu elementu tělesa při malé deformaci? Uvažujme infinitezimální kvádřík o hranách a, b, c . Při deformaci se hrany kvádru prodlouží nebo zkrátí a změní se úhly mezi nimi. Protože je kvádr malý, nemusíme uvažovat ohyb jeho hran. Vznikne z něj tedy malý rovnoběžnostěn, jehož hrany budou mít délky $a' = a(1 + \varepsilon_{11}), b' = b(1 + \varepsilon_{22}), c' = c(1 + \varepsilon_{33})$. Jeho objem je dán součinem délek hran a sinů úhlů mezi hranami. Pro malé deformace jsou ale odchylky těchto úhlů od pravého úhlu malé a siny se tedy liší od jedničky až ve druhém řádu deformace. Můžeme je tedy položit rovny jedné, protože uvažujeme malou deformaci, a objem rovnoběžnostěnu pak je

$$V' \approx a'b'c' = abc(1 + \varepsilon_{11})(1 + \varepsilon_{22})(1 + \varepsilon_{33}) \approx abc(1 + \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) = V(1 + \text{Tr } \hat{\varepsilon}). \quad (122)$$

Zde jsme opět zanedbali členy řádu vyššího než prvního a označili $\text{Tr } \hat{\varepsilon} = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ii}$ **stopu** tenzoru $\hat{\varepsilon}$.

- Vidíme, že relativní změna objemu elementu tělesa při malé deformaci je rovna stopě tenzoru deformace, tedy $\frac{V'-V}{V} = \text{Tr } \hat{\varepsilon}$.
- Pro další aplikace bude vhodné rozdělit tenzor deformace na dvě části. Jedna bude souviset pouze se změnou objemu elementu tělesa a druhá pouze se změnou jeho tvaru. Uvažujme deformaci popsanou v nějakém bodě tenzorem

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}. \quad (123)$$

Relativní změna objemu by byla stejná, pokud tenzor deformace byl

$$\hat{\varepsilon}_V = \text{diag} \left(\frac{1}{3} \text{Tr } \hat{\varepsilon}, \frac{1}{3} \text{Tr } \hat{\varepsilon}, \frac{1}{3} \text{Tr } \hat{\varepsilon} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \text{Tr } \hat{\varepsilon} & & \\ & \frac{1}{3} \text{Tr } \hat{\varepsilon} & \\ & & \frac{1}{3} \text{Tr } \hat{\varepsilon} \end{pmatrix}, \quad (124)$$

kde na prázdných místech jsou nuly.

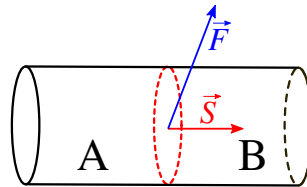
- Zbylá deformace je čistě smyková, beze změny objemu, zato se změnou tvaru:

$$\hat{\varepsilon}_S = \hat{\varepsilon} - \hat{\varepsilon}_V = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} - \frac{1}{3} \text{Tr} \hat{\varepsilon} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} - \frac{1}{3} \text{Tr} \hat{\varepsilon} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} - \frac{1}{3} \text{Tr} \hat{\varepsilon} \end{pmatrix}, \quad (125)$$

- Takto jsme tenzor deformace rozložili na čistě objemovou část $\hat{\varepsilon}_V$ a čistě smykovou část $\hat{\varepsilon}_S$. Objemová část popisuje pouze změnu objemu, přičemž tvar zůstává stejný (element tělesa se izotropně zvětší nebo zmenší, ale zůstane geometricky podobný svému původnímu tvaru). Smyková část naopak souvisí pouze se změnou tvaru, objem se nemění.

4.2 Tenzor napětí

- Nyní se budeme věnovat vnitřním silám, které působí mezi jednotlivými elementy tělesa díky tomu, že jsou elementy spolu v přímém kontaktu (dotýkají se). Takovým silám říkáme plošné. Budeme uvažovat malou plošku S uvnitř tělesa, umístěnou mezi částí tělesa, kterou označíme A, a částí B, viz obrázek ukazující situaci v případě tyče:



- Budeme zkoumat, jakou silou působí část B na část A prostřednictvím plošky S . Za tím účelem zadefinujeme vektor plošky \vec{S} tak, že je na plošku kolmý a jeho velikost je rovna velikosti plošky, tj. $|\vec{S}| = S$; orientace vektoru \vec{S} je taková, že směřuje pryč („ven“) od části A, o sílu na niž se nyní zajímáme, je tedy orientován ve směru vnější normály.
- Jakou silou působí vnější element na vnitřní? Ukazuje se, že tato síla je dána lineárním vztahem

$$\vec{F} = \hat{\sigma} \vec{S}, \quad \text{neboli maticově} \quad \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}, \quad (126)$$

kde $\hat{\sigma}$ je **tenzor napětí** a σ_{ik} jsou jeho složky

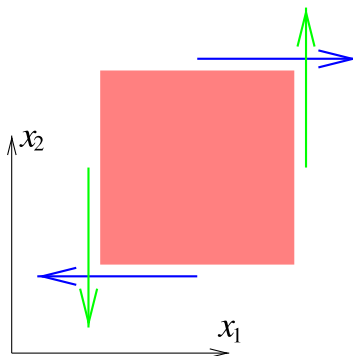
- Toto je síla, kterou působí část B („vnější“) na část A („vnitřní“); sílu, kterou naopak působí A na B, bychom získali opět ze vztahu (126), ale plošku \vec{S} bychom museli orientovat opačně; síla by tak byla také opačná, což přesně odpovídá principu akce a reakce. Tento princip je tak ve vztahu (126) automaticky zabudován.

- *Příklad: ideální tekutina*

Sice nejde o pružné těleso, ale tenzor napětí lze dobře definovat i v tekutinách. Jak víme, v ideální tekutině (nebo i ve viskózní, která je v klidu), je síla, kterou na sebe přes plošku S působí části tekutiny, rovna součinu plošky a tlaku v tekutině a působí dovnitř plošky, tedy platí $\vec{F} = -p\vec{S}$. Odtud tenzor napětí $\sigma_{ik} = -p\delta_{ik}$, tedy

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \quad (\text{v ideální tekutině}) \quad (127)$$

- Všimněte si, že podobně jako tomu bylo u vektorů momentu hybnosti a úhlové rychlosti, ani vektory \vec{F} a \vec{S} nemusí být rovnoběžné. Pokud rovnoběžné nejsou, svědčí to o přítomnosti **smykových napětí**. Např. pokud $\sigma_{12} \neq 0$, pak pro plošku $\vec{S} = (0, S, 0)$ dostáváme nenulovou složku síly $F_1 = S\sigma_{12}$. Tedy ploškou v rovině x_1x_3 se přenáší síla ve směru osy x_1 , tj. vektor této síly leží v rovině plošky. Takové síle říkáme smyková.
- Naopak diagonální složky tenzoru napětí popisují síly v tělese, které jsou kolmé na plošku, prostřednictvím níž působí. Takové síly mají tedy charakter tahu (pokud je příslušná diagonální složka kladná) nebo tlaku (pokud je záporná).



- Tenzor napětí je vždy **symetrický**. Plyne to z následující úvahy. Představme si krychličku uvnitř tělesa tak malou, že v jejím objemu lze tenzor napětí považovat za konstantní. Krychličku orientujeme podle souřadnicových os (viz obrázek). Podívejme se na smykové síly v rovině x_1x_2 , které působí na stěny kolmé na osu x_1 . Na obrázku jsou to síly vyznačené zeleně. Síly jsou vzájemně opačné, protože protější stěny krychličky mají opačné normálové vektory. Síla na pravou stěnu je $\sigma_{21}a^2$, kde a je hrana krychličky. Síly tedy působí na krychličku momentem, který se snaží ji roztočit. Kromě toho působí v rovině x_1x_2 další dvě síly, ty, které působí na stěny kolmé na osu x_2 a jsou vyznačeny modře. Také tyto síly působí na krychličku momentem, který se jí snaží roztočit. Síla na horní stěnu je $\sigma_{12}a^2$. Jen tehdy, pokud je $\sigma_{12} = \sigma_{21}$, momenty obou dvojic sil se vyruší a k roztáčení nedojde. Pokud by tomu tak nebylo, budou se takto roztáčet všechny pomyslné krychličky. Navíc úhlové zrychlení bude tím větší, čím je krychlička menší, protože moment setrvačnosti krychliček je úměrný a^5 a moment sil a^3 a tedy úhlové zrychlení je úměrné a^{-2} . V takovém případě by se těleso okamžitě rozpadlo. Vnitřní síly, které udržují těleso pohromadě, se ale postarají o to, že jakmile se objeví nějaká nediagonální složka tenzoru napětí, okamžitě se jí přizpůsobí příslušná „zrcadlová“ složka. Tenzor tak stále zůstává symetrický. To platí i pro kapaliny, kde sice úplně nelze mluvit o soudržnosti, ale uvedené roztáčení by ani zde nebylo možné.
- Podobně jako tenzor deformace, i tenzor napětí můžeme rozdělit na dvě části – objemovou část (i když přesnější by bylo mluvit o tahově--tlakové části) $\hat{\sigma}_V = \text{diag} \left(\frac{1}{3} \text{Tr} \hat{\sigma}, \frac{1}{3} \text{Tr} \hat{\sigma}, \frac{1}{3} \text{Tr} \hat{\sigma} \right)$ a smykovou část $\hat{\sigma}_S = \hat{\sigma} - \hat{\sigma}_V$.
- Důležitou veličinou je celková plošná síla působící na nějaký objem V tělesa. Dostaneme ji integrací elementární plošné síly přes plochu ohraničující tento objem:

$$\vec{F} = \int_S \hat{\sigma} d\vec{S} = \int_V \text{div} \hat{\sigma} dV, \quad (128)$$

kde jsme využili zobecněné Greenovy věty pro převod integrálu přes uzavřenou plochu na integrál přes objem touto plochu uzavřený. Divergence tenzoru napětí je definována jako vektor o složkách

$$(\text{div} \hat{\sigma})_i = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \quad (129)$$

Divergence tenzoru napětí tak udává hustotu plošných sil.

- Jak víme, při přechodu od jedné kartézské soustavy souřadnic k jiné (natočením souřadnicových os) se složky vektorů transformují prostřednictvím matice přechodu (označme ji T). Lze tedy očekávat, že se budou nějak transformovat i složky tenzoru napětí. Je užitečné zjistit, jak.
- Nejprve zapíšeme transformační vztahy pro vektory \vec{F} a \vec{S} :

$$\vec{F}' = \hat{T}\vec{F}, \quad \vec{S}' = \hat{T}\vec{S}, \quad (130)$$

kde čárkované složky se vztahují k nové (pootočené) soustavě souřadnic. Tyto rovnice zkombinujeme se vztahem (126) a dostaneme

$$\vec{F}' = \hat{T}\vec{F} = \hat{T}\hat{\sigma}\vec{S} = \hat{T}\hat{\sigma}\hat{T}^{-1}\vec{S}'. \quad (131)$$

Odtud pak z požadavku, aby v čárkované soustavě platil vztah $\vec{F}' = \hat{\sigma}'\vec{S}'$, plyne hledaný transformační vztah pro tenzor napětí

$$\hat{\sigma}' = \hat{T}\hat{\sigma}\hat{T}^{-1} = \hat{T}\hat{\sigma}\hat{T}^T, \quad (132)$$

kde v posledním kroku jsme využili ortogonalitu transformace \hat{T} , díky níž jsme mohli nahradit matici \hat{T}^{-1} maticí \hat{T}^T .

- Je dobře známo, že pomocí ortogonální transformace lze libovolnou symetrickou matici převést na diagonální tvar. Lze to proto provést i pro tenzor napětí, který pak získá tvar

$$\sigma_{\text{diag}} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}. \quad (133)$$

Souřadnicové osy soustavy, v níž je $\hat{\sigma}$ diagonální, se nazývají **hlavní osy** tenzoru napětí a hodnoty $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ jsou jeho **hlavní hodnoty**.

- *Příklad: kroucení mrkve*

Budeme-li kroutit mrkev, vytvoříme v jejích stěnách smykové napětí. Tenzor napětí bude

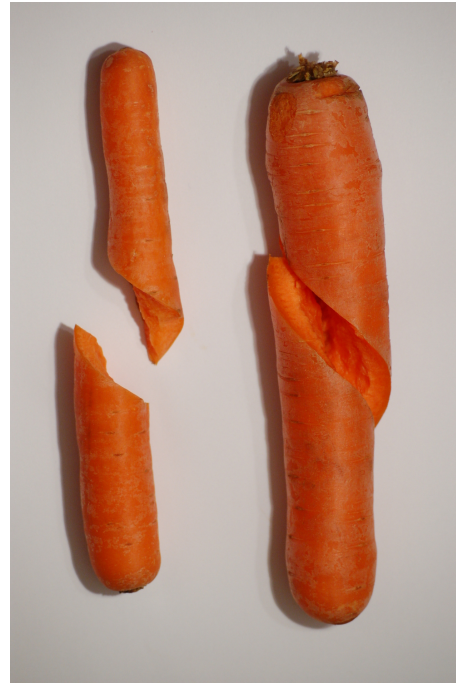
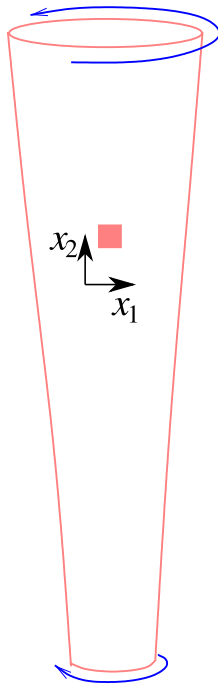
$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & A & 0 \\ A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Chceme-li jej vyjádřit v soustavě natočené o $\pi/4$ kolem osy x_3 , musíme jej transformovat podle výše uvedeného vztahu, přičemž matice přechodu je $\hat{T} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Výsledný tenzor

v pootočené soustavě pak je

$$\hat{\sigma}' = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & A & 0 \\ A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & -A & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vidíme, že čistě smykové napětí je v natočené soustavě vlastně tahem ve směru jedné souřadnicové osy a tlakem ve směru druhé. Slabým naříznutím mrkve ve směrech nových os a jejím kroucením se o tom snadno můžeme přesvědčit – jeden řez se při kroucení rozevívá a druhý naopak svírá. Pokud ale mrkev nenařízneme a pouze silně kroutíme, zlomí se podél šroubovice (viz obrázek). To proto, že jsme překonali mez pevnosti v tahu v šikmém směru. Směr lomu je právě 45 stupňů.



- Podobně jako tenzor napětí se při pootočení soustavy souřadnic transformuje rovněž tenzor deformace, tedy v analogii se vztahem (132) platí $\hat{\varepsilon}' = \hat{T}\hat{\varepsilon}\hat{T}^T$.

4.3 Hookův zákon

- Napětí a deformace spolu úzce souvisí. Je-li deformace tělesa dostatečně malá, je napětí přímo úměrné deformaci. To je obsahem **Hookova zákona**. Jak lze matematicky vyjádřit lineární vztah mezi dvěma tenzory druhého řádu? Jak jsme viděli, lineární vztah mezi dvěma vektory byl zprostředkován tenzorem druhého řádu. Zde to bude tenzor čtvrtého řádu, který označíme \hat{C} :

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 C_{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (134)$$

Tenzor C_{ijkl} je **tenzor elastických koeficientů**. Vzhledem k symetrii tenzorů napětí a deformace je symetrický v indexech i, j i k, l a má i další symetrie. To, kolik má nezávislých složek, závisí na vnitřní symetrii tělesa. Nejvíce jich je pro krystaly trojklonné soustavy, a to 21. Nejméně nezávislých složek má z krystalů krychlová soustava, a to tři. Méně už mají pouze izotropní tělesa, a to dvě. Mezi izotropní tělesa patří i polykrystaly libovolné soustavy, protože díky náhodné orientaci mnoha mikroskopických krystalků se směrové vlastnosti zprůměrují. Dále se budeme zabývat jen izotropními tělesy.

- Pro izotropní těleso lze Hookův zákon zformulovat velmi jednoduše s využitím rozdělení tenzoru deformace a napětí na objemovou a smykovou část. Platí

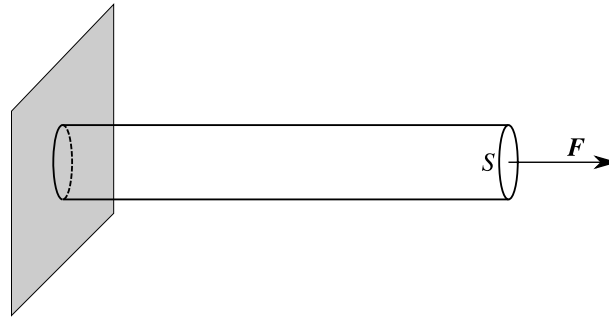
$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_V &= 3K \hat{\varepsilon}_V \\ \hat{\sigma}_S &= 2\mu \hat{\varepsilon}_S, \end{aligned} \quad (135)$$

kde K je **modul všestranné stlačitelnosti** a μ je **modul pružnosti ve smyku**. Oba mají rozměr tlaku a jednotku Pa (v praxi se spíše používá MPa, někdy i GPa).

- Modul všestranné stlačitelnosti udává, jak obtížné je změnit objem tělesa, jestliže na ně působíme ze všech stran tlakem p . V tomto případě je totiž $\sigma_{Vik} = -p \delta_{ik}$ a proto $\varepsilon_{ik} = -\frac{p}{3K} \delta_{ik}$. Relativní

změna objemu pak je $\Delta V/V = -\text{Tr } \varepsilon = \frac{p}{K}$, takže modul K vyjadřuje, jak obtížné je změnit tlakem p objem tělesa. Pokud např. tlak dosahuje jedné setiny hodnoty modulu K , zmenší se jeho vlivem objem o jedno procento.

- Podobně modul pružnosti ve smyku vyjadřuje, jak obtížné je provést čistě smykovou deformaci.
- Pro snadno deformovatelná tělesa, např. gumu, je hodnota μ relativně malá, protože je snadné změnit jejich tvar. Naproti tomu změnit objem je i u těchto těles velmi obtížné. Vždyť je to obtížné i třeba pro vodu, která je jen velmi málo stlačitelná, zatímco tvar mění zcela podle libosti. U takovýchto těles je proto $K \gg \mu$.
- *Příklad: natahování tyče*



Uvažujme tyč průřezu S , kterou natahujeme silou F působící ve směru osy x_1 podél její osy (viz obrázek). Vzhledem k tomu, že boční síly jsou nulové, bude v tenzoru napětí nenulová pouze složka $\sigma_{11} = \frac{F}{S}$. Tenzor napětí a jeho objemová a smyková část pak bude

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \frac{F}{S} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_V = \begin{pmatrix} \frac{F}{3S} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{F}{3S} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{F}{3S} \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_S = \begin{pmatrix} \frac{2F}{3S} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{F}{3S} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{F}{3S} \end{pmatrix}, \quad (136)$$

a z Hookova zákona

$$\hat{\varepsilon}_V = \frac{\hat{\sigma}_V}{3K} = \frac{F}{S} \begin{pmatrix} \frac{1}{9K} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9K} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9K} \end{pmatrix}, \quad \hat{\varepsilon}_S = \frac{\hat{\sigma}_S}{2\mu} = \frac{F}{S} \begin{pmatrix} \frac{1}{3\mu} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6\mu} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6\mu} \end{pmatrix} \quad (137)$$

a celkový tenzor deformace pak bude

$$\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}_V + \hat{\varepsilon}_S = \frac{F}{S} \begin{pmatrix} \frac{1}{9K} + \frac{1}{3\mu} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9K} - \frac{1}{6\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9K} - \frac{1}{6\mu} \end{pmatrix} = \frac{F}{S} \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sigma}{E} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sigma}{E} \end{pmatrix}, \quad (138)$$

kde $E = \frac{9K\mu}{3K+\mu}$ je **modul pružnosti v tahu** (Youngův modul) a σ je Poissonův poměr (koeficient) $\sigma = \frac{1}{2} \frac{3K-2\mu}{3K+\mu}$. Youngův modul vyjadřuje, jak obtížné je těleso natáhnout silou, která působí v jednom směru, a Poissonův poměr je poměr relativního příčného zkrácení a relativního podélného prodloužení při tomto procesu, $\sigma = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}$. Všimněte si, že pro měkká tělesa platí $E \approx 3\mu$ a $\sigma \approx 1/2$.

4.4 Rovnice rovnováhy

- Uvažujme těleso, které je v klidu. Síla působící na libovolný jeho element V je pak rovna nule. Tato síla je součtem dvou částí: plošné síly, kterou na element V působí prostřednictvím jeho hranice okolní elementy, a objemové síly, která působí i na vnitřek V vlivem dalekodosahových interakcí (gravitace, elektrická či magnetická síla u nabitých těles, setrvačné síly v případě popisu v neinerciální soustavě). Označíme-li objemovou hustotu objemových sil jako \vec{f} (např. pro gravitační sílu máme $\vec{f} = \rho\vec{g}$), platí pro každý objem V uvnitř tělesa $\int_V (\text{div } \hat{\sigma} + \vec{f}) dV = 0$ a tedy také v každém bodě tělesa

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + f_i = 0. \quad (139)$$

- Tensor napětí nyní vyjádříme pomocí tenzoru napětí prostřednictvím Hookova zákona pro izotropní těleso (135), který zapíšeme explicitně jako

$$\sigma_{ik} = K \delta_{ik} \sum_{l=1}^3 \varepsilon_{ll} + 2\mu \left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \sum_{l=1}^3 \varepsilon_{ll} \right) = \left(K - \frac{2\mu}{3} \right) \delta_{ik} \sum_{l=1}^3 \varepsilon_{ll} + 2\mu \varepsilon_{ik} \quad (140)$$

- Uvažujme, že deformace je malá, a vyjádříme tenzor malé deformace pomocí vektoru posunutí, rovnice (117). S využitím rovnice (140) pak dostaneme

$$\text{div } \hat{\sigma} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^3 \left[\left(K - \frac{2\mu}{3} \right) \delta_{ik} \sum_{l=1}^3 \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k \partial x_l} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} \right) \right] \quad (141)$$

$$= \left[\left(K - \frac{2\mu}{3} \right) \text{grad div } \vec{u} + \mu (\Delta \vec{u} + \text{grad div } \vec{u}) \right]_i, \quad (142)$$

kde $[\dots]_i$ značí i -tou složku vektoru v závorce.

- Je výhodné ještě vyjádřit Laplaceův operátor z vektoru pomocí identity $\Delta \vec{u} = \text{grad div } \vec{u} - \text{rot rot } \vec{u}$. Z rovnic (139) a (142) pak dostaneme

$$\left(K + \frac{4\mu}{3} \right) \text{grad div } \vec{u} - \mu \text{rot rot } \vec{u} + \vec{f} = 0, \quad (143)$$

což lze nakonec s využitím vztahů $K = \frac{E}{3(1-2\sigma)}$ a $\mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}$ přepsat jako

$$\text{grad div } \vec{u} - \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} \text{rot rot } \vec{u} = -\frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E(1-\sigma)} \vec{f}. \quad (144)$$

To je **rovnice rovnováhy**. V případě, že je deformace vyvolána jen silami působícími na povrch tělesa, je $\vec{f} = 0$ a pravá strana rovnice (144) je nulová.

- *Příklad: deformace kulové skořepiny*

Uvažujme kulovou skořepinu (těleso tvaru mezikouli), které se původně nachází ve vakuu v nezdeformovaném stavu. Deformace nastane pod vlivem tlaků p_1 a p_2 , které působí zevnitř a zvnějšku tělesa, tedy v místech $r = R_1$ a $r = R_2$. Jaká bude deformace? Umístíme počátek sférických souřadnic do středu skořepiny. Ze symetrie problému je jasné, že posunutí při deformaci nastane pouze v radiálním směru, tedy že $\vec{u} = (u_r, u_\varphi, u_\theta) = (u(r), 0, 0)$. Objemové síly jsou nulové, $\vec{f} = 0$. Z vyjádření gradientu, divergence a rotace ve sférických souřadnicích, viz např. <http://physics.muni.cz/~tomtyc/vzorke-mech.pdf>, dostaneme pro naše vektorové pole $\text{rot } \vec{u} = 0$ a z (144) pak

$$\text{grad div } \vec{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{div } \vec{u} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 u}{\partial r} = A = \text{const}. \quad (145)$$

Vynásobením rovnice r^2 a integrací dostaneme

$$\frac{\partial r^2 u}{\partial r} = Ar^2 \quad \Rightarrow \quad r^2 u = \frac{Ar^3}{3} + B \quad \Rightarrow \quad u(r) = \frac{A}{3} r + \frac{B}{r^2}. \quad (146)$$

Zde A, B jsou integrační konstanty. Ty určíme z podmínek pro tlak, ale k tomu potřebujeme tenzor napětí a proto i deformace. Složky tenzoru deformace ve sférických souřadnicích jsou uvedeny opět v <http://physics.muni.cz/~tomtyc/vzorce-mech.pdf>. V našem případě máme

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{A}{3} - \frac{2B}{r^3}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r} = \frac{A}{3} + \frac{B}{r^3} \quad (147)$$

(psali jsme jen nenulové derivace). Tenzor deformace a jeho objemová a smyková část jsou pak

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \frac{A}{3} - \frac{2B}{r^3} & & \\ & \frac{A}{3} + \frac{B}{r^3} & \\ & & \frac{A}{3} + \frac{B}{r^3} \end{pmatrix}, \quad \hat{\varepsilon}_V = \begin{pmatrix} \frac{A}{3} & & \\ & \frac{A}{3} & \\ & & \frac{A}{3} \end{pmatrix}, \quad \hat{\varepsilon}_S = \begin{pmatrix} -\frac{2B}{r^3} & & \\ & \frac{B}{r^3} & \\ & & \frac{B}{r^3} \end{pmatrix}. \quad (148)$$

Vidíme, že se změnou objemu souvisí jen konstanta A , se změnou tvaru konstanta B . Tenzor napětí ve stručnějším zápisu je pak $\hat{\sigma} = \text{diag} \left(KA - \frac{4\mu B}{r^3}, KA + \frac{2\mu B}{r^3}, KA + \frac{2\mu B}{r^3} \right)$, $\hat{\sigma}_V = \text{diag} (KA, KA, KA)$, $\hat{\sigma}_S = \text{diag} \left(-\frac{4\mu B}{r^3}, \frac{2\mu B}{r^3}, \frac{2\mu B}{r^3} \right)$. V $r = R_1$, resp. $r = R_2$ musí radiální diagonální složka tenzoru napětí odpovídat tlaku p_1 , resp. p_2 , musí tedy platit $\sigma_{rr}|_{r=R_i} = -p_i$ pro $i = 1, 2$. Z těchto dvou podmínek dostaneme

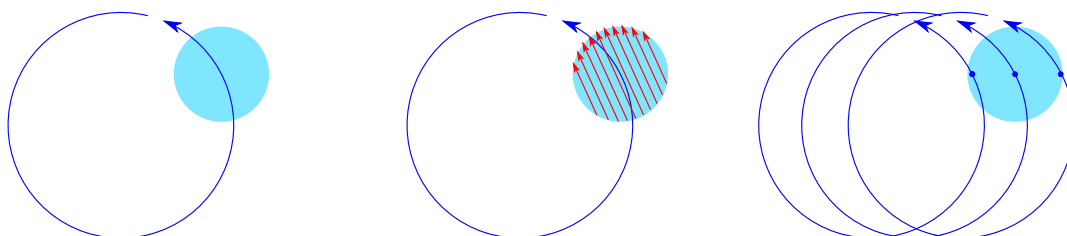
$$A = \frac{p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3}{K(R_2^3 - R_1^3)}, \quad B = \frac{p_1 - p_2}{4\mu} \frac{R_1^3 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \quad (149)$$

Vidíme, že pokud jsou oba tlaky stejné, nastane jen objemová deformace bez změny tvaru. Pokud platí $p_1 R_1^3 < p_2 R_2^3$, bude $A < 0$ a těleso zmenší svůj objem, v opačném případě jej zvětší.

5 Mechanika tekutin

5.1 Proudnic a trajektorie

- Veličiny, kterými budeme popisovat pohyb tekutiny, jsou její rychlost v každém bodě oblasti, kde se tekutina nachází, a některé dvě termodynamické veličiny např. tlak a hustota. Tyto veličiny jsou funkcemi polohy elementu tekutiny a času.
- Je-li rychlost jen funkcí souřadnic, ale ne času, jedná se o proudění **ustálené (stacionární)**.
- **Proudnic** je křivka, tečna k níž v libovolném jejím bodě určuje směr rychlosti proudění tekutiny ve zvoleném okamžiku
- Odlišnost proudnic a trajektorií lze ilustrovat na tomto příkladu: uvažujme nádobu s kapalinou, která vykonává časově proměnný translační pohyb tak, že každý její bod se pohybuje po stejné velké kružnici, viz obrázek níže – vlevo.



- V daném okamžiku jsou rychlosti všech částic v nádobě stejné, proudnice v tomto okamžiku jsou tedy vzájemně rovnoběžné úsečky, viz obrázek uprostřed; trajektorie částic jsou ovšem zcela odlišné: jsou to shodné, vzájemně posunuté kružnice, viz obrázek vpravo (jsou vyobrazeny trajektorie tří modře vyznačených elementů tekutiny)
- Proudnic se shodují s **trajektoriemi** elementů tekutiny, pouze když je proudění ustálené.

5.2 Rovnice kontinuity

- Uvažujme nějaký objem V zafixovaný v prostoru a zkoumejme, jak se mění s časem hmotnost tekutiny v něm obsažené. Tato hmotnost je $m = \int_V \rho \, dV$, její časová derivace je proto

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho \, dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV. \quad (150)$$

Hmotnost může přibývat nebo ubývat jen tak, že se tekutina dostane dovnitř nebo ven přes plochu S , která objem V ohraničuje. Hustota toku hmotnosti tekutiny je rovna $\rho \vec{v}$, proto rychlost změny hmotnosti tekutiny v objemu V je

$$\frac{dm}{dt} = - \oint_S \rho \vec{v} \, d\vec{S} = - \int_V \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \, dV. \quad (151)$$

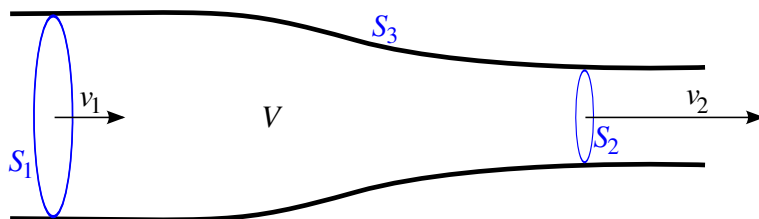
Znaménko mínus odpovídá tomu, že pokud je součin $\rho \vec{v} \, d\vec{S}$ kladný, tekutina elementem $d\vec{S}$ odtéká, protože vektor $d\vec{S}$ je orientován ve směru vnější normály. Integrál přes povrch jsme v rovnici (151) transformovali na objemový integrál pomocí Gaussovy věty. Odečtením rovnic (150) a (151) dostáváme

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right] \, dV = 0. \quad (152)$$

Díky tomu, že tato rovnice platí pro každý objem tekutiny, můžeme odstranit integrál a výsledkem je **rovnice kontinuity**:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (153)$$

- Je-li tekutina nestlačitelná, bude $\rho = \text{const.}$, v rovnici kontinuity se anuluje první člen a ve druhém můžeme vytknout ρ z divergence, takže v tomto případě dostáváme $\operatorname{div} \vec{v} = 0$.
- Pro nestlačitelnou tekutinu můžeme formulovat rovnici kontinuity i v integrálním tvaru. Představme si nestlačitelnou tekutinu proudící ve zužující se trubce, viz obrázek:



V rovnici (151) pak máme $\frac{dm}{dt} = 0$, odkud $\oint_S \rho \vec{v} d\vec{S} = 0$. Jestliže objem V vezmeme jako prostor mezi průřezy S_1 a S_2 a plochu S jako plochu sestávající z ploch S_1 a S_2 a z části vnitřního povrchu trubky S_3 mezi plochami S_1 a S_2 , dostáváme

$$\oint_S \rho \vec{v} d\vec{S} = \int_{S_1} \rho \vec{v} d\vec{S} + \int_{S_2} \rho \vec{v} d\vec{S} + \int_{S_3} \rho \vec{v} d\vec{S} = -S_1 v_1 + S_2 v_2 = 0, \quad (154)$$

což dává známou středoškolskou verzi rovnice kontinuity $S_1 v_1 = S_2 v_2$ (platí jen pro nestlačitelnou tekutinu!).

- Rovnice kontinuity je vlastně vyjádřením zákona zachování hmoty: hmotnost obsažená v dané oblasti prostoru se může měnit jedině tak, že hmota proudí skrze stěny této oblasti; hmotnost nemůže přibýt nebo ubýt „jen tak“

5.3 Eulerova rovnice

- Budeme nyní hledat pohybovou rovnici ideální tekutiny, tj. tekutiny bez viskozity (vnitřního tření).
- Uvažujme nějaký element objemu tekutiny o malém objemu V . Jeho hmotnost je ρV . Jaké je jeho zrychlení? Pokud bychom se domnívali, že je to jen $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$, mýlili bychom se. Při počítání zrychlení elementu totiž nesmíme provést derivaci z rychlosti podle času při pevné poloze v prostoru (to bychom jen zjistili, jak se mění rychlost v pevném bodě, ale tímto bodem procházejí stále nové elementy tekutiny), ale musíme sledovat stále stejný element. Zrychlení je

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}(x_1(t), x_2(t), x_3(t), t)}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i} v_i = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \quad (155)$$

Zde jsme formálně vynásobili skalárně operátor nabla s vektorem rychlosti a výsledný operátor $\vec{v} \cdot \nabla = \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ jsme aplikovali na vektor rychlosti.

- Zrychlení tedy máme, zbývá určit sílu působící na element objemu. Hustota plošné síly od okolní tekutiny jsou dány divergencí tenzoru napětí a ten je dán rovnicí (127). Proto $\operatorname{div} \hat{\sigma} = -\operatorname{grad} p$ a po přidání objemových sil je celková objemová hustota sil rovna $-\operatorname{grad} p + \vec{f}$. Pro náš velmi

malý objem V proto dostáváme 2. Newtonův zákon ve tvaru $m[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}] = V(-\text{grad } p + \vec{f})$, po dosazení $m = \rho V$ vydělení objemem V dostáváme

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \frac{1}{\rho} \vec{f}, \quad (156)$$

což je **Eulerova rovnice** popisující pohyb tekutiny. Všimněte si, že je nelineární díky členu $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$, který je kvadratický v rychlosti. Díky nelinearitě Eulerovy rovnice neplatí pro proudění tekutin princip superpozice a řešení pohybových rovnic je ve většině případů extrémně obtížné.

- **Příklad – hydrostatika:** Předpokládejme, že tekutina se vůbec nepohybuje. Pak levá strana rovnice (156) (zrychlení elementu) je nulová a platí $\text{grad } p = \vec{f}$, což je obecná rovnice pro hydrostatický tlak. Pro tekutinu v homogenním gravitačním poli, v němž $\vec{f} = \rho \vec{g}$, dostáváme $\text{grad } p = \rho \vec{g} = (0, 0, -\rho g)$ (předpokládáme, že osa z míří vzhůru) a pro nestlačitelnou tekutinu pak integrací známý vztah $p = p_0 - \rho g z$.
- **Příklad – Tvar hladiny rotující kapaliny**

Předpokládejme, že nestlačitelná kapalina rotuje kolem svislé osy z úhlovou rychlostí ω . Zrychlení elementu tekutiny na levé straně Eulerovy rovnice je pak ve válcových souřadnicích $\vec{a} = (-\omega^2 r, 0, 0)$ (dostředivé zrychlení), objemová síla je $\vec{f} = (0, 0, -\rho g)$ (tíhová síla). Dosazením do rovnice (156) dostaneme

$$(-\omega^2 r, 0, 0) = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial r}, \frac{\partial p}{\partial \varphi}, \frac{\partial p}{\partial z} \right) + (0, 0, -g) \quad (157)$$

Rozdělením na složky a řešením vzniklé soustavy diferenciálních rovnic dostaneme $p(r, z) = \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 - \rho g z + C$. Vidíme, že izobarami $p = \text{const}$ jsou rotační paraboloidy. Jeden z nich odpovídá hladině kapaliny.

5.4 Bernoulliho rovnice

- Uvažujme stlačitelnou tekutinu proudící ustáleně, tedy $\partial \vec{v} / \partial t = 0$. Zrychlení elementu tekutiny v Eulerově rovnici přepíšeme pomocí vektorové identity

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \frac{1}{2} \text{grad } v^2 - \vec{v} \times \text{rot } \vec{v} \quad (158)$$

Navíc budeme předpokládat, že poměr \vec{f} / ρ se dá vyjádřit jako $-\text{grad } U$, kde U je potenciál objemových sil. To je velmi rozumný předpoklad např. pro gravitační sílu, u níž je U přímo gravitační potenciál, nebo pro setrvačné síly. Tím rovnice (156) přejde na

$$\frac{1}{2} \text{grad } v^2 - \vec{v} \times \text{rot } \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p - \text{grad } U. \quad (159)$$

Promítněme nyní rovnici v daném bodě do směru rychlosti, tedy do směru proudnice v tomto bodě. Gradienty v rovnici (159) tím přejdou na derivace podle vzdálenosti měřené podél proudnice, kterou budeme značit l . Abychom to dokázali, stačí si uvědomit, že jednotkový vektor \vec{n} ve směru proudnice lze zapsat jako derivaci polohového vektoru podle l : $\vec{n} = d\vec{r} / dl$. Potom pro libovolnou veličinu a platí

$$\nabla a \cdot \vec{n} = \frac{\partial a}{\partial x} \frac{dx}{dl} + \frac{\partial a}{\partial y} \frac{dy}{dl} + \frac{\partial a}{\partial z} \frac{dz}{dl} = \frac{da}{dl}. \quad (160)$$

Rovnice (159) tím přejde na

$$\frac{d(v^2/2)}{dl} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dl} + \frac{dU}{dl} = 0, \quad (161)$$

Výraz $\vec{v} \times \text{rot } \vec{v}$ se neprojevil, protože je díky vektorovému součinu kolmý na rychlost a při promítnutí do směru proudnice dá nulu. Rovnici (161) pak můžeme podél proudnice zintegrovat:

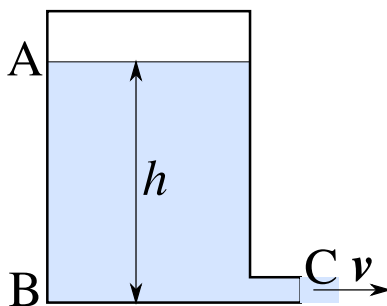
$$\frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + U = \text{const.}^5 \quad (162)$$

To je **Bernoulliho rovnice**. Je důležité, že uvedený výraz je konstantní jen podél dané proudnice. Pro každou proudnici může být tedy konstanta na pravé straně Bernoulliho rovnice jiná. Konstanta je společná pro všechny proudnice tehdy, když je pole rychlosti nevírové, tedy rotace rychlosti je všude nulová, protože pak v rovnici (161) člen s rotací vymizí pro promítnutí do libovolného směru.

- Pokud je tekutina nestlačitelná, je ρ konstantní, dá se vyjmout z integrálu a dostaneme

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U = \text{const.} \quad (\text{nestlačitelná tekutina}) \quad (163)$$

- **Příklad – výpočet rychlosti vytékání vody z nádoby:**



Potenciál U je v tomto případě gravitační, $U = gz$, kde z je výška nad výtakovým otvorem. Protože pole rychlosti je při takovémto běžném vytékání nevírové, je konstanta v rovnici (162) společná pro všechny proudnice, proto pro veličiny v bodech A, B, C platí

$$\frac{v_A^2}{2} + \frac{p_A}{\rho} + gh = \frac{v_B^2}{2} + \frac{p_B}{\rho} + 0 = \frac{v_C^2}{2} + \frac{p_C}{\rho} + 0 \quad (164)$$

Navíc víme, že na hladině i v bodě C je atmosférický tlak p_a , rychlost na hladině je téměř nulová (předpokládáme, že plocha hladiny je mnohem menší než průřez výtakového otvoru a podle rovnice kontinuity proto hladina klesá mnohem menší rychlostí než v_C). Proto

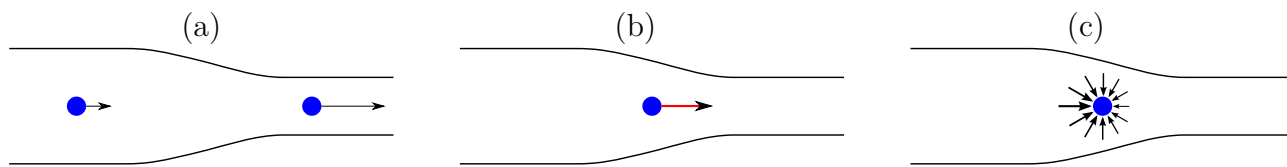
$$\frac{p_a}{\rho} + gh = \frac{p_B}{\rho} = \frac{v^2}{2} + \frac{p_a}{\rho} \quad (165)$$

Odtud dostáváme jednak zřejmý vztah pro hydrostatický tlak, $p_B = p_a + \rho gh$, jednak známý vztah pro výtokovou rychlost $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{\frac{2(p_B - p_C)}{\rho}}$.

- **Příklad – opět hydrostatika:** Předpokládejme, že tekutina je nestlačitelná a vůbec se nepohybuje. Pak z rovnice (163) plyne $p = -\rho U + \text{const.}$, což je obecná rovnice pro hydrostatický tlak. Pro kapalinu v homogenním gravitačním poli, v němž $U = gz$, dostáváme známý vztah $p = p_0 - \rho gz$, kde p_0 je tlak v místě $z = 0$.

- **Jiná aplikace – tlak v trubce nekonztantního průřezu s proudící ideální tekutinou:**

⁵člen s integrálem vznikl při integraci takto: $\int \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dl} dl = \int \frac{dp}{\rho}$



Uvažujme nestlačitelnou tekutinu ve zužující se trubce, viz obrázek (a). Podle rovnice kontinuity bude rychlost proudění v užší části větší než v širší, a podle Bernoulliho rovnice tedy bude v užší části menší tlak. To poněkud odporuje naší intuici. Překvapivé by to ale být nemělo z následujícího důvodu. Částice tekutiny se v levé části pohybuje pomalu, v pravé rychle. Při pohybu místy, kde se trubka zužuje, se tedy částice musí zrychlovat směrem doprava, viz obrázek (b). To musí být způsobeno nějakými silami. Jediné síly, co na částici působí, jsou tlakové síly od okolní tekutiny (gravitaci neuvažujeme). Z toho je jasné, že tlak v levé části trubky musí být větší než v pravé, aby výslednice tlakových sil směřovala doprava, viz obrázek (c). A to je přesně ve shodě s Bernoulliho principem.

- **Bernoulliho rovnice pro adiabatické proudění ideálního plynu:** při adiabatickém proudění platí $pV^\kappa = \text{const}$, kde V je objem nějakého množství plynu a κ je Poissonova konstanta. Proto $C\rho = p^{1/\kappa}$ a $\int \frac{dp}{\rho} = \int Cp^{-1/\kappa} dp = \frac{C}{1-1/\kappa} p^{1-1/\kappa} = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho}$. Tedy u adiabatického proudění plynu se podél proudnice není konstantní $\frac{v^2}{2} + p/\rho + U$ jako u nestlačitelné kapaliny, ale konstantní je veličina

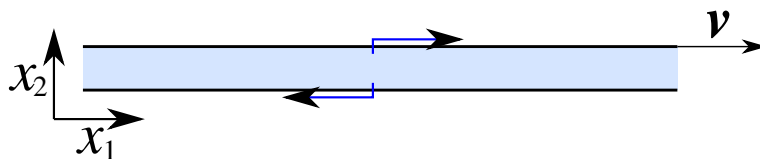
$$\frac{v^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} + U = \text{const.} \quad (\text{adiabatické proudění plynu}) \quad (166)$$

5.5 Navier-Stokesovy rovnice

- Je-li tekutina viskózní, objevují se v tekutině i smykové síly vlivem vnitřního tření. Ty se v tenzoru napětí projeví dodatečným členem, který můžeme označit τ_{ik} . Tenzor napětí je tedy roven

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \tau_{ik} \quad (167)$$

Tenzor $\hat{\tau}$ bude záviset na derivacích rychlosti tekutiny podle souřadnic, protože ty vyjadřují vzájemný pohyb částí tekutiny. Například uvažujme následující situaci na obrázku:



Síly, kterými desky působí na tekutinu mezi nimi jsou označené šipkami. Příslušné smykové napětí zřejmě bude přímo úměrné spádu vodorovné složky rychlosti podél svislé souřadnice, tedy v našem případě $\sigma_{12} = \sigma_{21} = \eta v/h$, kde h je vzdálenost desek a η je **dynamická viskozita** tekutiny.

- Pro nestlačitelnou tekutinu obecně platí

$$\tau_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right). \quad (168)$$

- Pokud tekutina rotuje jako celek, je výraz $\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}$ roven nule a viskózní síly se neuplatní (např. při rotaci kolem osy z máme $\vec{v} = (-\omega x_2, \omega x_1, 0)$ a nulovost výrazu je očividná).

- Jak přispěje viskózní člen v tenzoru napětí k povrchovým silám? Hustota f_{visk} viskózních sil působících na element tekutiny je rovna divergenci viskózní části tenzoru napětí:

$$(f_{\text{visk}})_i = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} = \eta \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} + \eta \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i \partial x_k} = \eta \left(\Delta v_i + \frac{\partial \text{div } \vec{v}}{\partial x_i} \right) \quad (169)$$

Zde jsme předpokládali, že viskozita je konstantní. Pro nestlačitelnou tekutinu je druhý člen nulový.

- Pohybovou rovnici pro nestlačitelnou viskózní tekutinu dostaneme tak, že na pravou stranu Eulerovy rovnice (156) přidáme viskózní člen:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v} + \frac{1}{\rho} \vec{f}, \quad (170)$$

- To je Navier-Stokesova rovnice⁶. Od Eulerovy rovnice se liší pouze členem $\frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v}$.
- Pokud by tekutina byla stlačitelná, byl by v pohybové rovnici navíc další člen, odpovídající jinému typu viskozity – odporu tekutiny proti změně objemu.
- *Příklad: proudění kapaliny ve válcové trubce*

Budeme uvažovat situaci, kdy viskózní nestlačitelná kapalina proudí laminárně v trubce kruhového průřezu poloměru R , jejíž osa je osou z , gravitaci či jinou objemovou sílu neuvažujeme. Rychlost každého elementu kapaliny má směr osy z a element se pohybuje rovnoměrně přímočaře, proto je zrychlení elementu, tedy celá levá strana rovnice (170), rovna nule. Dostáváme tak

$$\text{grad } p = \eta \Delta \vec{v}. \quad (171)$$

Protože rychlost má nenulovou jen z -tovou složku, $\vec{v} = (0, 0, v)$, je tomu tak i s jejím laplaciánem a podle rovnice (171) tedy i s gradientem tlaku. Proto tlak závisí jen na souřadnici z a platí $dp/dz = \eta \Delta v$. Z vyjádření laplaciánu ve válcových souřadnicích (r, φ, z) a využití válcové symetrie problému (nic nezávisí na φ) dostaneme

$$\Delta v = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = \frac{1}{\eta} \frac{dp}{dz} = -\frac{\Delta p}{\eta l} = \text{const.} \quad (172)$$

Zde jsme v poslední rovnosti využili toho, že dp/dz musí být konstanta, neboť Δv závisí jen na r a tedy ne na z . Označili jsme $\Delta p, l$ po řadě tlakový rozdíl na začátku a konci trubky a její délku. Integrací rovnice (172) dostaneme

$$v(r) = -\frac{\Delta p}{4\eta l} r^2 + A \ln r + B, \quad (173)$$

kde A, B jsou integrační konstanty. Protože rychlost proudění na ose musí být konečná, je $A = 0$, a rychlost pro $r = R$ je nulová, proto $B = \Delta p R^2 / (4\eta l)$ a

$$v(z) = \frac{\Delta p}{4\eta l} (R^2 - r^2). \quad (174)$$

To je známý kvadratický zákon pro rychlost laminárního proudění v trubce. Ještě lze spočítat celkový objemový tok jako integrál z rychlosti přes průřez trubky:

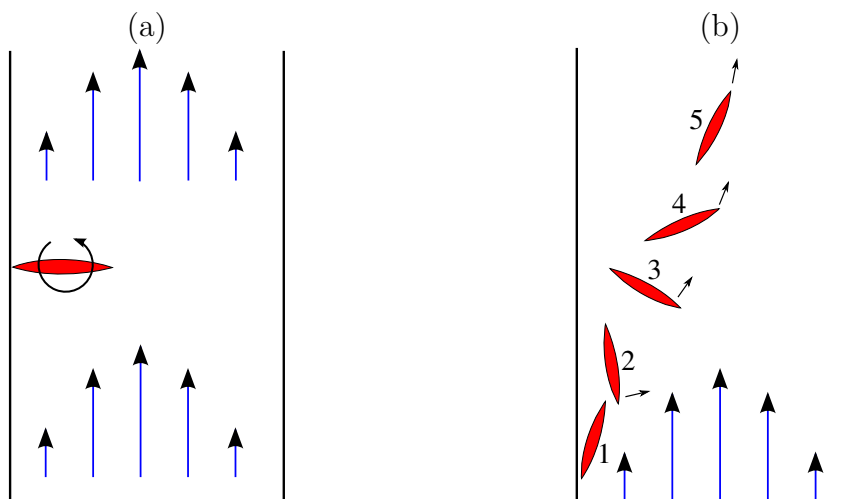
$$\Phi = \int_S v(z) dS = \frac{\Delta p}{4\eta l} \int_0^{2\pi} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr d\varphi = \frac{\pi \Delta p R^4}{8\eta l}. \quad (175)$$

Dostali jsme další známý výsledek – průtok je přímo úměrný tlakovému spádu a čtvrté mocnině poloměru trubky.

⁶Většinou se mluví o Navier-Stokesových rovnicích, protože dříve bylo zvykem psát rovnice po složkách, takže místo jedné rovnice byly tři.

5.6 Vírové a nevírové proudění

- Rotace vektorového pole rychlosti, $\vec{\Omega} \equiv \text{rot } \vec{v}$, vyjadřuje množství otáčivého pohybu tekutiny v daném bodě.
- Jestliže $\text{rot } \vec{v} \neq 0$, jde o tzv. vírové proudění. Nejjednodušším příkladem je rotace tekutiny jako celku úhlovou rychlostí ω , kdy $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ a $\vec{\Omega} = 2\vec{\omega}$. Vidíme, že rotace rychlosti je v tomto případě dvojnásobkem $\vec{\omega}$.
- Ukazuje se, že malá kulička unášená tekutinou se bude otáčet úhlovou rychlostí rovnou polovině rotace rychlosti v místě, kde se kulička nachází.
- Příklad – nachází-li se blízko břehu řeky loďka (viz obrázek (a) – pohled shora), začne se díky nestejně rychlosti proudu blíže a dále od břehu otáčet ve směru šipky. Skutečně, y -ová složka rychlosti roste se souřadnicí x , proto je $(\text{rot } \vec{v})_z = \partial v_y / \partial x - \partial v_x / \partial y$ kladné a loďka se bude otáčet v kladném smyslu, jak je vyznačeno. Toho využívají vodáci při najíždění do proudu (a podobně při přistávání), kdy najíždějí špičkou proti proudu a proud sám loď otočí díky nenulové rotaci rychlosti, viz obrázek (b).



- Proudění, u něžž v celém objemu tekutiny platí $\text{rot } \vec{v} = 0$, se nazývá **nevírové**.
- Uvažujme proudění nestlačitelné ideální tekutiny, které nemusí být ustálené. Budeme-li opět předpokládat, že pro objemovou sílu platí $\vec{f}/\rho = -\text{grad } U$, a využijeme-li identitu (158), přepíšeme Eulerovu rovnici (156) do tvaru

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad } v^2 - \vec{v} \times \text{rot } \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p - \text{grad } U \quad (176)$$

- Na tuto rovnici aplikujeme operaci rotace, přičemž využijeme identitu $\text{rot grad } a = 0$, která platí pro libovolné skalární pole a . Tak dostaneme

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} = \text{rot } (\vec{v} \times \vec{\Omega}). \quad (177)$$

Tato rovnice má důležitý důsledek. Je-li proudění nevírové v nějakém okamžiku, je pravá strana rovnice nulová a proto je proudění nevírové i kdykoli později⁷.

⁷V ideální tekutině ovšem může nastat situace, kdy vrstvy tekutiny po sobě jakoby kloužou; v takovém případě se na rozhraní těchto vrstev rotace rychlosti stává nekonečnou, v reálné tekutině ale viskozita ihned způsobí turbulenci. My nebudeme tyto situace uvažovat a zaměříme se na nevírové proudění.

- Uvažujme nevírové proudění tekutiny. Vzhledem k tomu, že $\text{rot } \vec{v} = 0$, lze pole rychlosti napsat jako gradient nějaké skalární funkce, kterou označíme ψ :

$$\vec{v} = \text{grad } \psi. \quad (178)$$

Tato funkce je jednoznačná, probíhá-li proudění v jednoduše souvislé oblasti prostoru, tedy takové, kde každou křivku lze spojitou transformací deformovat do bodu. Pokud proudění probíhá ve vícenásobně souvislé oblasti (např. do tekutiny je vložen tuhý prstenec nebo nekonečně dlouhý válec), bude funkce ϕ obecně mnohoznačnou funkcí souřadnic.

- *Příklady nevírového proudění*

Triviální příklad je ten, kdy tekutina má v celém prostoru stejnou rychlost, $\vec{v} = \vec{v}_0 = \text{const}$. Pak $\psi = \vec{v}_0 \vec{r}$. Jiný příklad je proudění ideálního víru, kdy proudnice tvoří kružnice kolmé na osu víru (vírovou čáru), kterou ztotožníme s osou z , jejichž středy leží na vírové čáře. Velikost rychlosti je nepřímou úměrná vzdálenosti od osy, $v = \alpha/r$, a pole rychlosti je pak ve válcových souřadnicích dáno vztahem $\vec{v} = (0, \frac{\alpha}{r}, 0)$, popř. v kartézských souřadnicích $\vec{v} = \left(-\frac{\alpha y}{x^2+y^2}, \frac{\alpha x}{x^2+y^2}, 0\right)$. Není těžké se přesvědčit, že rotace rychlosti je nulová. Odpovídající potenciál proudění je pak $\psi = \alpha\varphi$, kde φ je polární úhel válcových souřadnic. Je zajímavé, že pole ideálního víru je nevírové. V ideálním víru je totiž rotace rychlosti – vírovost – zkoncentrována na ose víru, kde má rychlost singularitu.

- Proudí-li nestlačitelná tekutina nevírově, platí v důsledku rovnice kontinuity a rovnice (178) $\text{div grad } \psi = \Delta\psi = 0$, kde Δ je Laplaceův operátor. Problém nalezení proudění v dané situaci se pak redukuje na problém řešení Laplaceovy rovnice splňující dané počáteční a okrajové podmínky.

5.7 Gravitační vlny

- Představme si ideální nestlačitelnou kapalinu s klidnou vodorovnou hladinou v gravitačním poli Země. Jestliže ji vychýlíme z rovinného tvaru, gravitační pole bude mít snahu hladinu opět vyrovnat. To povede ke vzniku oscilací a vln šířících se po hladině.
- Budeme hledat rovnice, kterými se vlny řídí. Především budeme předpokládat, že rychlostní pole kapaliny je nevírové a tedy existuje potenciál rychlosti ϕ . Kombinací rovnic $\vec{v} = \nabla\phi$ a rovnice kontinuity $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ dostaneme pro ϕ Laplaceovu rovnici

$$\Delta\phi = 0. \quad (179)$$

- Řešení této rovnice budeme hledat ve tvaru vlny, která závisí na kartézských souřadnicích x a z (osa z míří svisle vzhůru) takto:

$$\phi(x, y, t) = \cos(kx - \omega t) f(z), \quad (180)$$

kde $f(z)$ je dosud neznámá funkce. Dosazení do rovnice (179) dá

$$\frac{d^2 f}{dz^2} - k^2 f = 0 \quad \Rightarrow \quad f(z) = Ae^{kz} + Be^{-kz}, \quad (181)$$

přičemž člen s B směrem do hloubky kapaliny exponenciálně roste a uplatní se jen u konečně hluboké kapaliny; my budeme uvažovat nekonečně hlubokou kapalinu, pro kterou je tento člen nefyzikální, proto položíme $B = 0$. Potenciál pak bude

$$\phi(x, z, t) = Ae^{kz} \cos(kx - \omega t). \quad (182)$$

- Vidíme tedy, že rovnice (179) skutečně umožňuje řešení ve tvaru postupné harmonické vlny šířící se podél hladiny, přičemž vlna zasahuje i do hloubky kapaliny, kde se exponenciálně tlumí.
- Abychom našli vztah mezi k a ω v rovnici (182) (tj. disperzní relaci), vyjdeme z Eulerovy rovnice. Budeme předpokládat, že amplituda vln a je malá proti vlnové délce λ . V Eulerově rovnici pak lze zanedbat člen $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$ proti $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$. Skutečně, je-li τ perioda kmitů, je rychlost řádu a/τ a její výrazné prostorové změny nastávají na délce řádu λ , takže $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$ je řádu $\frac{a}{\tau} \frac{1}{\lambda} \frac{a}{\tau}$, zatímco $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ je řádu $\frac{a}{\tau}$. Podmínku $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \ll \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ lze proto vyjádřit jako

$$\frac{a^2}{\lambda \tau^2} \ll \frac{a}{\tau^2} \quad \Rightarrow \quad a \ll \lambda, \quad (183)$$

což právě požadujeme.

- Eulerova rovnice pak po zanedbání člene $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$ a vyjádření objemových sil ve tvaru $\vec{f} = -\rho \nabla U$, kde $U = gz$, vede na následující rovnici pro ϕ :

$$\text{grad} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz \right) = 0, \quad (184)$$

jejímž řešením je

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz = f(t), \quad (185)$$

kde $f(t)$ je libovolná funkce času. Tuto funkci lze ovšem položit rovnu nule, protože k potenciálu rychlosti lze přidat libovolnou funkci času (nikoli ale souřadnic), aniž by se tím změnilo pole rychlostí. Odtud pak

$$p = -\rho gz - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (186)$$

- Označíme nyní z -tovou souřadnici hladiny jako $\zeta(x, y, t)$. V rovnováze je $\zeta = 0$, proto ζ udává odchylku hladiny od rovnovážné polohy. Na hladinu působí atmosférický tlak p_0 , proto rovnice (186) získá tvar $p_0 = -\rho g \zeta - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$. Konstantu p_0 můžeme opět odstranit vzhledem k nejednoznačnosti potenciálu⁸, takže dostaneme

$$g\zeta + \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{z=\zeta} = 0 \quad (187)$$

- Protože je amplituda vln malá, je malé i stlačení ζ . Proto lze z -tovou složku rychlosti částice kapaliny na hladině aproximovat derivací $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$ ⁹. Současně je ale tato rychlost rovna derivaci potenciálu podle z . Pro hladinu tak dostáváme

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \quad (188)$$

což lze přepsat jako

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right)_{z=0} = 0, \quad (189)$$

kde jsme ještě nahradili derivace přímo na hladině derivacemi vypočtenými v rovnovážné poloze hladiny, což je vzhledem k malým amplitudám přijatelné.

⁸Prakticky by se to provedlo tak, že bychom provedli substituci $\phi = \phi' - \frac{p_0 t}{\rho}$ a přeznačili pak ϕ' zpět na ϕ .

⁹Přesný výraz pro rychlost kapaliny na hladině by byl $v_z = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} v_x + \frac{\partial \zeta}{\partial y} v_y$

- Jestliže nyní dosadíme vlnu (182) do rovnice (189), dostaneme hledanou disperzní závislost

$$\omega = \sqrt{kg} \quad (190)$$

a z ní pak i **fázovou rychlost** v_f a **grupovou rychlost** v_g vln:

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}, \quad v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}, \quad (191)$$

- Rozdělení rychlosti v kapalině dostaneme derivováním potenciálu podle souřadnic:

$$v_x = \frac{\partial\phi}{\partial x} = -Ake^{kz} \sin(kx - \omega t), \quad v_z = \frac{\partial\phi}{\partial z} = Ake^{kz} \cos(kx - \omega t). \quad (192)$$

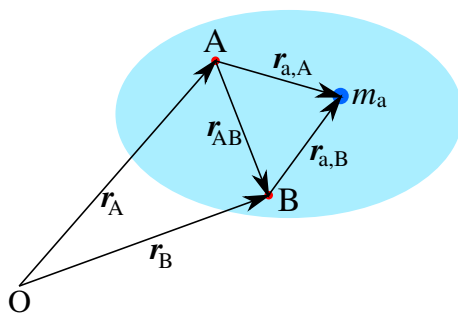
Vektor rychlosti se tedy při daných souřadnicích x, z rovnoměrně otáčí úhlovou rychlostí ω a jeho velikost se nemění. Exponenciálně však klesá s hloubkou pod hladinou.

- Podobně lze ukázat, že trajektorie částic kapaliny jsou kružnice, jejichž poloměr exponenciálně klesá s hloubkou. Vlny na vodě tedy nejsou ani čistě příčné, ani podélné, ale jsou jakousi kombinací obojího.

6 Mechanika tuhého tělesa

6.1 Úhlová rychlost

- Zatím jsme se zabývali hlavně (i když nejenom) soustavami částic (hmotných bodů). Nyní budeme zkoumat pohyb **tuhých těles**, tedy takových, u nichž se nemění vzájemné vzdálenosti jejich jednotlivých částí. Hmota v tuhém tělese je nejčastěji rozložena spojitě, i když tuhé těleso může být tvořeno i diskrétními částicemi spojenými např. tuhými tyčemi, které fixují vzájemnou polohu částic.
- Pohyb tuhého tělesa lze chápat jako kombinaci dvou pohybů. Jednak pohybu libovolného, ale pevného bodu tělesa (říkejme mu referenční bod, v obrázku níže bod A), a jednak rotace kolem tohoto bodu:



Při tomto rozkladu lze rychlost libovolného bodu tělesa vyjádřit jako

$$\vec{v}_a = \vec{V}_A + \vec{\omega}_A \times \vec{r}_{a,A}, \quad (193)$$

kde \vec{V}_A je rychlost bodu A, $\vec{\omega}_A$ je úhlová rychlost rotace tělesa kolem bodu A a $\vec{r}_{a,A}$ je polohový vektor a -tého elementu tělesa vzhledem k bodu A.

- Provedme podobný rozklad, ale tentokrát s jiným referenčním bodem B, viz opět obrázky nahoře. Dostaneme analogicky $\vec{v}_a = \vec{V}_B + \vec{\omega}_B \times \vec{r}_{a,B}$. Pokud navíc využijeme toho, že $\vec{r}_{a,A} - \vec{r}_{a,B} = \vec{r}_{AB} \equiv \vec{r}_B - \vec{r}_A$, dostaneme porovnáním obou vyjádření rychlosti \vec{v}_a rovnici

$$\vec{V}_A + \vec{\omega}_A \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega}_A \times \vec{r}_{a,B} = \vec{V}_B + \vec{\omega}_B \times \vec{r}_{a,B}, \quad (194)$$

kteřá musí platit pro všechny body tělesa, tedy pro všechna $\vec{r}_{a,B}$. To je možné jedině tehdy, pokud $\vec{\omega}_B = \vec{\omega}_A$; vidíme, že úhlová rychlost nezávisí na volbě referenčního bodu a je tedy charakteristická pro pohyb tělesa jako celku.

6.2 Tenzor setrvačnosti

- Jednou z vůbec nejdůležitějších fyzikálních veličin je moment hybnosti. Vypočítejme jej pro tuhé těleso. Předpokládejme, že těleso je složeno z diskrétních hmotných bodů o hmotnostech m_a v polohách \vec{r}_a . Spočítejme nejprve moment hybnosti vzhledem k hmotnému středu tělesa¹⁰. Rychlost a -té částice bude $\vec{v}_a = \vec{\omega} \times \vec{r}_a$, protože \vec{V} je nyní rovno nule, a dostáváme

$$\vec{L} = \sum_a m_a \vec{r}_a \times \vec{v}_a = \sum_a m_a \vec{r}_a \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_a) = \sum_a m_a [r_a^2 \vec{\omega} - \vec{r}_a (\vec{r}_a \cdot \vec{\omega})], \quad (195)$$

kde jsme využili vektorovou identitu $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{A}) = A^2 \vec{B} - \vec{A}(\vec{A} \cdot \vec{B})$.

- Napišme i -tou složku vektorové rovnice (195), přičemž složky polohového vektoru budeme značit x_i , tedy $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$:

$$L_i = \sum_a m \left[\sum_l x_l^2 \omega_i - x_i \sum_k x_k \omega_k \right] = \sum_k \left[\sum_a m \left(\delta_{ik} \sum_l x_l^2 - x_i x_k \right) \right] \omega_k = \sum_k J_{ik} \omega_k, \quad (196)$$

kde jsme zavedli složky **tenzoru setrvačnosti**

$$J_{ik} = \sum_a m \left(\delta_{ik} \sum_l x_l^2 - x_i x_k \right) \quad (197)$$

a kvůli přehlednosti přestali psát index a u hmotností částic a jejich souřadnic. Pro těleso se spojitě rozloženou hmotností pak místo (197) máme

$$J_{ik} = \int_V \rho(x_1, x_2, x_3) \left(\delta_{ik} \sum_l x_l^2 - x_i x_k \right) dV \quad (198)$$

- Jestliže zapíšeme tenzor setrvačnosti jako matici,

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} \sum_a m(x_2^2 + x_3^2) & -\sum_a m x_1 x_2 & -\sum_a m x_1 x_3 \\ -\sum_a m x_2 x_1 & \sum_a m(x_1^2 + x_3^2) & -\sum_a m x_2 x_3 \\ -\sum_a m x_3 x_1 & -\sum_a m x_3 x_2 & \sum_a m(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix}, \quad (199)$$

pak lze moment hybnosti vyjádřit maticově jako

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \quad (200)$$

nebo jednoduše jako

$$\vec{L} = \hat{J} \vec{\omega} \quad (201)$$

¹⁰Moment hybnosti je vždy vztažen k nějakému bodu, protože v jeho definici vystupuje polohový vektor a ten závisí na volbě počátku soustavy souřadnic. Nyní tedy počítáme moment hybnosti vzhledem k hmotnému středu tělesa a navíc v té vztažené soustavě, v níž je v daném okamžiku hmotný střed v klidu.

- Tenzor setrvačnosti \hat{J} zprostředkovává lineární vztah (201) mezi vektory $\vec{\omega}$ a \vec{L} . Všimněte si, že tento vztah připomíná známý, i když poněkud nepřesný, vztah $L = J\omega$ mezi momentem hybnosti a úhlovou rychlostí ze střední školy. Význam je zde ale poněkud jiný, protože \hat{J} musíme chápat jako matici. Směr vektoru momentu hybnosti může být obecně jiný než směr vektoru úhlové rychlosti.
- Tenzor setrvačnosti je symetrický, tj. $J_{ik} = J_{ki}$. Má tedy jen 6 nezávislých složek.
- Vektor momentu hybnosti \vec{L} bude rovnoběžný s vektorem úhlové rychlosti právě tehdy, bude-li $\vec{\omega}$ vlastním vektorem tenzoru setrvačnosti (199).
- *Příklad: rotace tenkého kruhového disku kolem osy skloněné o úhel θ vůči ose symetrie*
Jestliže ztotožníme osu z v s osou disku a počátek umístíme do hmotného středu disku, bude tenzor setrvačnosti a vektor úhlové rychlosti a momentu hybnosti

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}mr^2 & & \\ & \frac{1}{4}mr^2 & \\ & & \frac{1}{2}mr^2 \end{pmatrix}, \quad \vec{\omega} = \omega \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \vec{L} = \hat{J}\vec{\omega} = \frac{mr^2\omega}{4} \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ 2 \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (202)$$

Vektory \vec{L} a $\vec{\omega}$ tedy budou rovnoběžné jen tehdy, když $\theta = 0$ nebo $\theta = \pi/2$. V obou případech je skutečně $\vec{\omega}$ vlastním vektorem \hat{J} .

- Při natočení soustavy souřadnic se složky tenzoru setrvačnosti transformují podobně jako složky tenzoru napětí, tady v analogii se vztahem (132):

$$\hat{J}' = \hat{T}\hat{J}\hat{T}^T \quad (203)$$

- Stejně jako tenzor napětí lze i tenzor setrvačnosti diagonalizovat přechodem do soustavy spojené s jeho hlavními osami. V této soustavě

$$J' = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix}, \quad (204)$$

kde na diagonále jsou opět hlavní hodnoty.

- Doposud jsme pracovali s momentem setrvačnosti vyjádřeným vzhledem k hmotnému středu tělesa. Jak to bude s momentem vyjádřeným vzhledem k obecnému bodu v prostoru, jestliže navíc hmotný střed bude obecně konat translační pohyb? Pro jeho výpočet provedeme rozklad (193) rychlosti na translační a rotační část, přičemž za referenční bod zvolíme hmotný střed tělesa. Pro moment hybnosti tělesa pak dostáváme

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_a m_a \vec{r}_a \times \vec{v}_a = \sum_a m_a \vec{r}_a \times (\vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{a,T}) = M\vec{R} \times \vec{V} + \sum_a m_a (\vec{R} + \vec{r}_{a,T}) \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{a,T}) \\ &= M\vec{R} \times \vec{V} + \sum_a m_a \vec{r}_{a,T} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{a,T}) = M\vec{R} \times \vec{V} + \vec{L}_T. \end{aligned} \quad (205)$$

Přitom jsme označili polohový vektor a -té částice vzhledem k hmotnému středu jako $\vec{r}_{a,T} (= \vec{r}_a - \vec{R})$, využili rovnici (41), označili $M = \sum_a m_a$ celkovou hmotnost tělesa a využili skutečnost, že $\sum_a m_a \vec{r}_{a,T} = 0$ (protože polohový vektor hmotného středu vzhledem k hmotnému středu je samozřejmě nulový). Rovněž jsme nyní označili \vec{L}_T moment hybnosti vztažený ke hmotnému středu, který jsme počítali výše.

- Z rovnice (205) vidíme, že moment hybnosti vztažený k obecnému bodu se liší od momentu vztaženého ke hmotnému středu o $M\vec{R} \times \vec{V}$, tedy o veličinu, kterou bychom mohli nazvat „moment hybnosti hmotného středu“. Dále vidíme, že pokud je hmotný střed v klidu (tj. $\vec{V} = 0$), je moment hybnosti stejný vzhledem ke všem bodům prostoru.

- Velice důležitou veličinou je i kinetická energie rotačního pohybu tuhého tělesa. Ta je rovna kinetické energii v soustavě, v níž je v daném okamžiku v klidu hmotný střed tělesa. Podobným výpočtem jako v rovnici (195) lze dojít k tomu, že

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \hat{J} \vec{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^3 J_{ik} \omega_i \omega_k = \frac{1}{2} (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \quad (206)$$

- Celkovou kinetickou energii tělesa, které rotuje a zároveň koná translační pohyb, lze pak vyjádřit jako

$$T = \frac{1}{2} MV^2 + T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \hat{J} \vec{\omega}, \quad (207)$$

kde M je celková hmotnost tělesa, V je rychlost jeho hmotného středu a \hat{J} je tenzor setrvačnosti vzhledem k hmotnému středu.

6.3 Eulerovy rovnice

- Uvažujme tuhé těleso, které se pohybuje pod vlivem vnějších sil nebo bez tohoto vlivu. Označme \vec{M} moment vnějších sil působících na těleso. Pak platí

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad (208)$$

- Vyjádříme nyní moment hybnosti tělesa v soustavě spojené s hlavními osami tělesa. Tím se nemyslí, že bychom moment hybnosti počítali vzhledem k této neinerciální soustavě (takový moment hybnosti by byl samozřejmě roven nule), ale to, že moment hybnosti vzhledem k laboratorní soustavě vyjadřujeme v okamžité bázi hlavních os tělesa.
- Abychom to mohli provést, zjistíme nejprve, jak se v laboratorní soustavě mění vektor \vec{A} konstantní vzhledem k rotující soustavě. Platí $\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{A}$; pokud by se navíc vektor \vec{A} měnil i vzhledem k rotující soustavě (tuto změnu označíme $\frac{d'\vec{A}}{dt}$), platilo by

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d'\vec{A}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{A} \quad (209)$$

- Bude-li nyní veličina \vec{A} momentem hybnosti tělesa, dostaneme z rovnic (208) a (??)

$$\vec{M} = \frac{d'\vec{L}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L} \quad (210)$$

- Využijeme nyní toho, že v soustavě spojené s hlavními osami platí $L_i = J_i \omega_i$, a rozepíšeme první složku rovnice (210):

$$M_1 = \frac{d'L_1}{dt} + (\vec{\omega} \times \vec{L})_1 = \frac{d'J_1\omega_1}{dt} + (\omega_2 L_3 - \omega_3 L_2)_1 = J_1 \frac{d\omega_1}{dt} + (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3 \quad (211)$$

a přidáním rovnic pro další dvě složky dostáváme Eulerovy rovnice

$$\begin{aligned} J_1 \frac{d\omega_1}{dt} + (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3 &= M_1 \\ J_2 \frac{d\omega_2}{dt} + (J_1 - J_3) \omega_1 \omega_3 &= M_2 \\ J_3 \frac{d\omega_3}{dt} + (J_2 - J_1) \omega_1 \omega_2 &= M_3 \end{aligned} \quad (212)$$

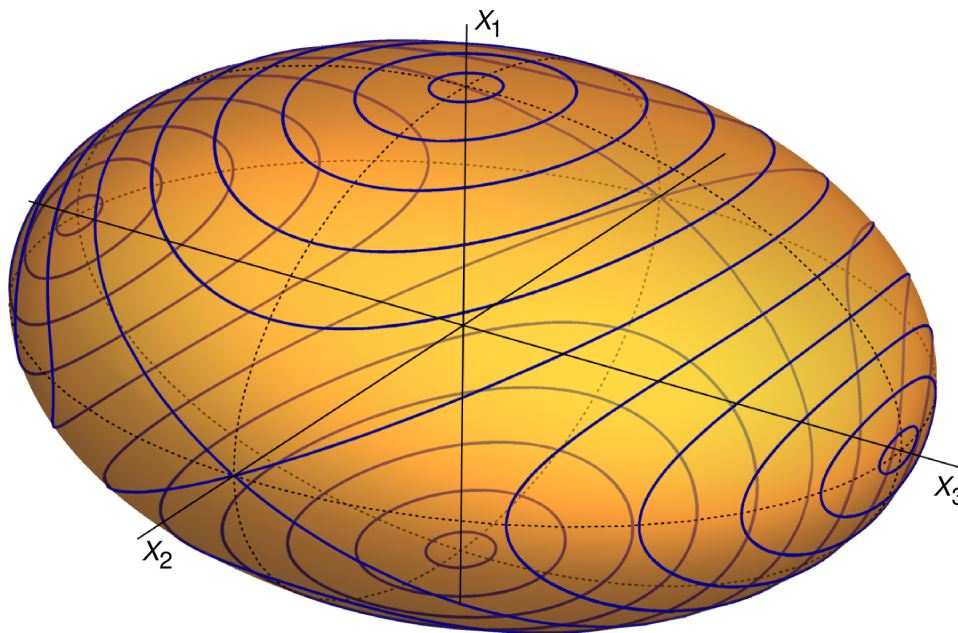
- Při absenci vnějších silových momentů (např. při vyhození roztočeného tělesa do vzduchu) je pravá strana rovnic (212) rovna nule.

6.4 Volná rotace nesymetrického tělesa

- Řešit Eulerovy rovnice pro nesymetrické těleso (takové, které má všechny tři hlavní momenty setrvačnosti J_1, J_2, J_3 různé), není díky jejich nelinearitě snadné. O volné rotaci tělesa si však můžeme udělat dobrou představu i pomocí kvalitativního rozboru. Za tím účelem vyjádříme pro volně rotující těleso ($\vec{M} = 0$) rotační kinetickou energii a kvadrát momentu hybnosti pomocí složek momentu hybnosti vztahovaných vzhledem k hlavním osám tenzoru setrvačnosti:

$$L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2, \quad T_{\text{rot}} = \frac{L_1^2}{2J_1} + \frac{L_2^2}{2J_2} + \frac{L_3^2}{2J_3}. \quad (213)$$

Zde jsme opět využili toho, že v souřadnicové soustavě spojené s hlavními osami platí, že $L_i = J_i \omega_i$. Obě tyto veličiny L^2 a T_{rot} se zachovávají. (V laboratorní soustavě se samozřejmě zachovávají i samotné složky vektoru \vec{L} , ale složky v této soustavě nyní nepoužíváme.) První rovnice v (213) je rovnicí sféry (povrchu koule), druhá je rovnicí povrchu elipsoidu. Koncový bod vektoru \vec{L} tedy musí ležet současně na sféře i elipsoidu, jejichž velikosti jsou dány počátečními podmínkami (tj. hodnotami L a T_{rot}). Na obrázku níže vidíme elipsoid odpovídající určité rotační energii tělesa a jeho průniky se sférami různých velikostí (odpovídajícími různým hodnotám velikosti momentu hybnosti), přičemž předpokládáme, že $J_1 < J_2 < J_3$:



Je vidět, že pokud roztočíme těleso tak, že vektor jeho momentu hybnosti leží v blízkosti osy x_1 nebo x_3 (tj. osy s nejmenším nebo největším momentem setrvačnosti), vektor \vec{L} se ani v pozdějším čase od příslušné osy příliš nevzdálí a rotace kolem těchto os je tak stabilní. Pokud ale roztočíme těleso tak, že vektor jeho momentu hybnosti leží v blízkosti osy x_2 (tj. osy s prostředním momentem setrvačnosti), vektor \vec{L} se později od příslušné osy velmi vzdálí dostane se téměř do opačného směru oproti své původní hodnotě (vše stále vztahujeme k hlavním osám tělesa; v laboratorní soustavě je vektor \vec{L} samozřejmě konstantní). Těleso se tak jakoby převrací a rotace kolem osy x_2 je nestabilní. To se dá ověřit jednoduchým pokusem – pozorováním rotace tělesa ve tvaru kvádra vyhozeného do vzduchu.

Reference

- [1] L. D. Landau a E. M. Lifšic, Kurz teoretické fyziky – Mechanika, vydáno např. rusky, anglicky, německy.

- [2] L. D. Landau a E. M. Lifšic, Kurz teoretické fyziky – Mechanika kontinua, vydáno např. rusky, anglicky, německy.
- [3] M. Brdička, L. Samek a B. Sopko, Mechanika kontinua, Academia Praha.
- [4] J. V. José a E. J. Saletan, Classical dynamics – a contemporary approach, Cambridge University Press.
- [5] R. P. Feynman, R. B. Leighton a M. Sands, Feynmanovy přednášky z fyziky.