Teoretická mechanika – VAZBY

22.9. 2008

VAZ.1

hodina navíc (pro naše stud.)

máloktdy se mech. soustava skládá z oddělených hmotných bodů nebo těles – většinou se nějak dotýkají, jsou k sobě připevněny, kloužou po sobě apod.

Tehdy mluvíme o vazbách – nějak omezují pohyb těles.

Příklad: – těleso na naklon. rovině
– Matem. kyvadlo
– vozíček s kyvadlem
– kyvadlo na pružině – není vazba!

Jakou má vazba povahu (původ, interakci)?
Je to krátkodosahová forma elmg. interakce
Působí při dotyku těles mezi el. obaly atomů
Síla se mění extrémně rychle se vzdáleností

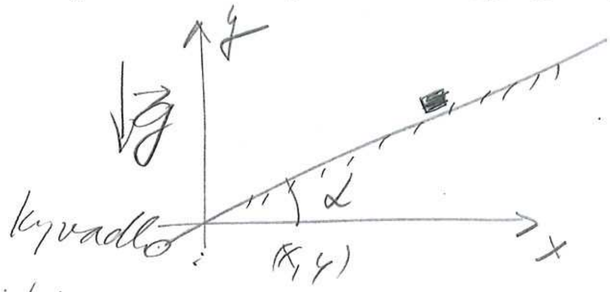
Počet st. volnosti = 3x počet hm. bodů – počet vazeb
3 body: $3 \times 3 - 3 = \underline{6}$ (3 transl. + 3 rot.)

Kolik nezáv. pohyb. rovnic mám při n st. volnosti?
$\underline{\underline{n}}$!

Jak s vazbami počítat? Jak je zahrnout do pohyb. rovnic? Není úplně jednoduchá otázka
nejlepší asi – nejprve přesný popis, pak provést vhodnou aproximaci!

Zavedeme zobecněné souřadnice pro popis systému. Tolik, kolik je st. volnosti bez započtení vazeb.

Příklad: těleso na naklon. rovině:

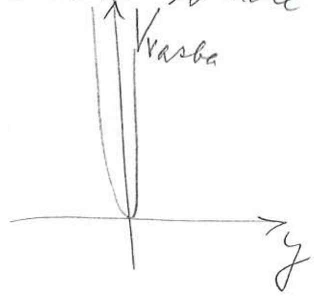


nebo

?

Lepší 2. možnost – vazbu pak vyjádříme velmi jednoduše podmínkou $\eta = \eta_0$

Vazba: ve směru y bude velmi silná „pružina“, která bude těleso nutit být v rovnov. poloze y=0.



V id. případě ∞ tuhé vazby – nekonečně strmá parabola

Tedy napíšeme $V_{vazba} = \frac{1}{2}k(\eta-\eta_0)^2$ k obrovské.

Navíc máme $V_{grav.} = mgy = mg(\xi\sin\alpha + \eta\cos\alpha)$

Pak $L = T - V = \frac{m}{2}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) - mg\xi\sin\alpha - mg\eta\cos\alpha - \frac{1}{2}k(\eta-\eta_0)^2$

1) pro ξ: $m\ddot{\xi} = -mg\sin\alpha$

η: $m\ddot{\eta} = -mg\cos\alpha - k(\eta-\eta_0)$

Zajímá nás rovnováha ve směru η, tedy když $\ddot{\eta} = 0$,

tj.: $\eta = \eta_0 - \frac{mg\cos\alpha}{k}$

Vidíme, že vlivem grav. síly došlo k nepatrnému posunu rovnov. polohy proti η_0 směrem dolů.

le rovnice pro ξ zůstala nezávislá, oddělila se.
Důvod: síla vazby nepůsobí ve směru změny ξ, ale vždy kolmo na vazbu $\Rightarrow$ nemá žádný účinek na ostatní stupně volnosti.

Proto můžeme od začátku „stupně volnosti", které vazba omezuje, vypustit z úvah a rovnou počítat jen se skut. st. volnosti.

Prakticky: zvolíme tolik zobec. souřadnic, kolik je skutečných st. volnosti, poh. rce sestavíme jen pro ně.

obec. situace – lib. potenciál $V(x,y)$, vazba $\psi(x,y)=0$ (implicitně). Dám v okolí bodu x_0, y_0 splňujícího $\psi(x_0,y_0)=0$ lok. souřadnice

$$d\eta = \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy = \nabla\psi \cdot d\vec{r}$$

$$d\xi = -\frac{\partial \psi}{\partial y}dx + \frac{\partial \psi}{\partial x}dy \quad \ldots$$

Nalezení touto metodou bodu na kouli, kde odpadne:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2\right) - mgr\cos\theta - \frac{1}{2}k(r-r_0)^2$$

$$r: \; m\ddot r = + m r\dot\theta^2 - mg\cos\theta - k(r-r_0)$$

$$\theta: \; \frac{d}{dt}\left(m r^2\dot\theta\right) = + mgr\sin\theta$$

Zajímá mě, kdy nebude r nic přitlačovat ani nadlehčovat, tj. kdy $\ddot r = 0$ a $r = r_0$. Tedy $mr\dot\theta^2 = mg\cos\theta$ – správná podmínka!