Příklady ze statistické fyziky

Toto je soubor příkladů ze statistické fyziky, každý příklad má přiřazenu jednu až tři hvězdičky značící obtížnost příkladu. Pokud najdete nějaké chyby (jejichž existence je velmi pravděpodobná) - v zadání nebo ve výsledcích, tak mi prosím dejte vědět.

1. $\star\star\star$Užitím Laplaceovy metody odvoďte Stirlingovu formuli

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

2. Euler-Maclaurinova formule jest

$$\sum_{k=n}^{m} f(k) - \frac{1}{2}f(n) - \frac{1}{2}f(m) = \int_n^m f(k)\mathrm{d}k + \sum_{k=1}^{q}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(f^{(2k-1)}(m) - f^{(2k-1)}(n)\right) + R,$$

kde B_k jsou Bernoulliova čísla, $f^{(k)}$ značí k-tou derivaci funkce f a R je zbytek, který je často malý pro dostatečně velké q.

1. $\star$S užitím

$$B_0(x) = 1, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}B_n(x) = nB_{n-1}(x) \text{ pro } n \geq 1, \qquad \int_0^1 B_n(x)\mathrm{d}x = 1,$$

najděte Bernoulliovy polynomy $B_1(x)$, $B_2(x)$, $B_3(x)$, $B_4(x)$ a Bernoulliova čísla B_0, B_1, B_2, B_3, B_4. Bernoulliova čísla jsou hodnoty Bernoulliových polynomů v $x = 0$.

2. $\star\star\star$Dokažte Euler-Maclaurinovu formuli.

3. $\star$Užitím Euler-Maclaurinovy formule vypočtěte přibližně hodnotu

$$\zeta\left(\tfrac{3}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}},$$

v Euler-Maclaurinově formuli zvolte $q = 2$.

Výsledky:

(1) $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$; $B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$; $B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$; $B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$

(3) $\zeta\left(\frac{3}{2}\right) \doteq 2.607$ (správná hodnota $\zeta\left(\frac{3}{2}\right) \doteq 2.612$)

3. $\star$Uvažujte dutou nádobu při teplotě T vyplněnou elektromagnetickým zářením. Předpokládejte, že ve stěně nádoby je malý otvor plochy A, kterým může unikat záření ven a nádoby, přičemž rychlost úniku záření je natolik pomalá, že neovlivní rovnováhu uvnitř nádoby. Podle Planckova zákona je energie elektromagnetického záření s frekvencí v intervalu $(\nu, \nu + \mathrm{d}\nu)$ směřujícího do prostorového úhlu $\mathrm{d}\Omega$, které projde za jednotku času jednotkovou plochou rovna

$$\frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}\mathrm{d}\nu\mathrm{d}\Omega.$$

Určete výkon elektromagnetického záření unikajícího z nádoby. Bude se vám hodit integrál

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}\mathrm{d}x = \frac{\pi^4}{15}.$$

Výsledky: $\dfrac{P}{A} = \sigma T^4$; $\sigma = \dfrac{2\pi^5}{15}\dfrac{k^4}{h^3c^2}$

4. $\star$Vymyslete jak by šla s užitím Stefan–Boltzmannova vyzařovacího zákona změřit teplota slunce pomocí pravítka (a znalosti teploty na zemi). Jaká vám vyšla teplota slunce?

5. $\star$Uvažujte částici se spinem $\frac{1}{2}$ a magnetickým momentem μ umístěnou v magnetickém poli intenzity B. Budeme-li se zabývat pouze interakcí magnetického momentu s magnetickým polem, pak stačí uvažovat dvourozměrný Hilbertův prostor stavů. Jako bázi tohoto prostoru můžeme zvolit vlastní vektory $|+\rangle$, $|-\rangle$ operátoru $\hat{\sigma}_z$ příslušející vlastním hodnotám $+1$ a -1, tj.

$$\hat{\sigma}_z|+\rangle = +1|+\rangle, \qquad \hat{\sigma}_z|-\rangle = -1|-\rangle.$$

Hamiltonián pak zapíšeme jako

$$\hat{H} = -\mu B \hat{\sigma}_z.$$

Předpokládejte, že tento systém je v kontaktu s tepelným rezervoárem o teplotě T.

1. (a) Zapište stavovou sumu.
   (b) Zapište pravděpodobnost nalezení systému v jednotlivých stavech.
   (c) Zapište matici hustoty.
2. Vypočtěte střední hodnotu magnetického momentu m ve směru magnetického pole, odpovídající operátor má tvar $\hat{m} = \mu\hat{\sigma}_z$.
   (a) S užitím pravděpodobnosti nalezení systému v jednotlivých stavech.
   (b) Pomocí matice hustoty.
   (c) Ze stavové sumy, pokud víte, že $\mathrm{d}F = -S\mathrm{d}T - m\mathrm{d}B$.
3. Jaká je střední hodnota magnetického momentu pro $T \to 0$ a $T \to \infty$, dokážete vysvětlit proč tomu tak je?

Výsledky:

(1a) $Z = 2\cosh\left(\frac{\mu B}{kT}\right)$

(1b) $P(|+\rangle) = w_+ = \dfrac{e^{\frac{\mu B}{kT}}}{e^{\frac{\mu B}{kT}} + e^{-\frac{\mu B}{kT}}}$; $P(|-\rangle) = w_- = \dfrac{e^{-\frac{\mu B}{kT}}}{e^{\frac{\mu B}{kT}} + e^{-\frac{\mu B}{kT}}}$

(1c) $\hat{\rho} = |+\rangle w_+ \langle +| + |-\rangle w_- \langle -|$

(2) $m = \mu w_+ - \mu w_- = \mathrm{tr}(\hat{m}\hat{\rho}) = -\left(\frac{\partial F}{\partial B}\right)_T = \mu \tanh\left(\frac{\mu B}{kT}\right)$

(3) $m(T \to 0) = \mu$; $m(T \to \infty) = 0$

6. $\star$Uvažujte částici se spinem 1 a magnetickým momentem μ umístěnou v magnetickém poli intenzity B. Budeme-li se zabývat pouze interakcí magnetického momentu s magnetickým polem, pak stačí uvažovat trojrozměrný Hilbertův prostor stavů. Jako bázi tohoto prostoru můžeme zvolit vlastní vektory $|+1\rangle$, $|0\rangle$, $|-1\rangle$ operátoru momentu hybnosti $\hat{S}_z$ příslušející vlastním hodnotám $+1$, 0 a -1, tj.

$$\hat{S}_z|+1\rangle = +1|+1\rangle, \qquad \hat{S}_z|0\rangle = 0|0\rangle, \qquad \hat{S}_z|-1\rangle = -1|-1\rangle.$$

Hamiltonián pak zapíšeme jako

$$\hat{H} = -\mu B \hat{S}_z.$$

Předpokládejte, že tento systém je v kontaktu s tepelným rezervoárem o teplotě T.

1. (a) Zapište stavovou sumu.
   (b) Zapište pravděpodobnost nalezení systému v jednotlivých stavech.
   (c) Zapište matici hustoty.

2. Vypočtěte střední hodnotu magnetického momentu m ve směru magnetického pole, odpovídající operátor má tvar $\hat{m} = \mu \hat{S}_z$.

   (a) S užitím pravděpodobností nalezení systému v jednotlivých stavech.

   (b) Pomocí matice hustoty.

   (c) Ze stavové sumy, pokud víte, že $\mathrm{d}F = -S\mathrm{d}T - m\mathrm{d}B$.

3. Jaká je střední hodnota magnetického momentu pro $T \to 0$ a $T \to \infty$?

Výsledky:

(1a) $Z = e^{\frac{\mu B}{kT}} + 1 + e^{-\frac{\mu B}{kT}}$

(1b) $P(|+1\rangle) = \dfrac{e^{\frac{\mu B}{kT}}}{e^{\frac{\mu B}{kT}} + 1 + e^{-\frac{\mu B}{kT}}}$; $P(|0\rangle) = \dfrac{1}{e^{\frac{\mu B}{kT}} + 1 + e^{-\frac{\mu B}{kT}}}$; $P(|-1\rangle) = \dfrac{e^{-\frac{\mu B}{kT}}}{e^{\frac{\mu B}{kT}} + 1 + e^{-\frac{\mu B}{kT}}}$

(1c) $\hat{\rho} = \dfrac{|+1\rangle e^{\frac{\mu B}{kT}} \langle +1| + |0\rangle\langle 0| + |-1\rangle e^{-\frac{\mu B}{kT}} \langle -1|}{e^{\frac{\mu B}{kT}} + 1 + e^{-\frac{\mu B}{kT}}}$

(2) $m = \mu \dfrac{e^{\frac{\mu B}{kT}} - e^{-\frac{\mu B}{kT}}}{e^{\frac{\mu B}{kT}} + 1 + e^{-\frac{\mu B}{kT}}}$

(3) $m(T \to 0) = \mu$; $m(T \to \infty) = 0$

7. $\star$Uvažujte klasický magnetický moment velikosti μ (stav systému je určen orientací momentu v trojrozměrném prostoru). Magnetický moment je umístěn v magnetickém poli intenzity B, energie systému je tedy rovna

$$E = -\mu \vec{n} \vec{B}$$

kde $\vec{n}$ je jednotkový vektor ve směru orientace magnetického mementu $\vec{m} = \mu \vec{n}$. Předpokládejte, že tento systém je v kontaktu s tepelným rezervoárem o teplotě T.

1. (a) Zapište stavovou sumu.

   (b) Určete pravděpodobnost $p(\vec{n})\mathrm{d}\Omega$ že moment je orientován ve směru $\vec{n}$.

2. Vypočtěte střední hodnotu magnetického momentu m ve směru magnetického pole.

   (a) S užitím pravděpodobnosti $p(\vec{n})\mathrm{d}\Omega$.

   (b) Ze stavové sumy, pokud víte, že $\mathrm{d}F = -S\mathrm{d}T - m\mathrm{d}B$.

3. Jaká je střední hodnota magnetického momentu pro $T \to 0$ a $T \to \infty$?

Výsledky:

(1a) $Z = 4\pi \frac{\mu B}{kT} \sinh\left(\frac{\mu B}{kT}\right)$

(1b) $P(\vec{n})\mathrm{d}\Omega = \dfrac{\exp\left(\frac{\mu \vec{n} \vec{B}}{kT}\right)}{4\pi \frac{\mu B}{kT} \sinh\left(\frac{\mu B}{kT}\right)} \mathrm{d}\Omega$

(2) $m = \mu \left(\coth\left(\frac{\mu B}{kT}\right) - \frac{kT}{\mu B}\right)$

(3) $m(T \to 0) = \mu$; $m(T \to \infty) = 0$

8. $\star$Klasický harmonický oscilátor s hmotností m a frekvencí ω je popsán Hamiltoniánem

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2.$$

Předpokládejte, že celková energie systému je rovna E.

1. (a) Zakreslete křivku odpovídající pohybu částice ve fázovém prostoru.
   (b) Čemu je úměrná pravděpodobnost $p(x)\mathrm{d}x$, že poloha částice se nachází v intervalu $(x, x+\mathrm{d}x)$? Určete tuto pravděpodobnost.
2. (a) Zapište hustotu pravděpodobnosti $\rho(p,x)$ nalezení částice v daném elementu fázového prostoru (pravděpodobnost, že se částice nachází v elementu $(p, p+\mathrm{d}p)\times(x, x+\mathrm{d}x)$ fázového prostoru je $\rho(p,x)\mathrm{d}p\mathrm{d}x$).
   (b) Z hustoty pravděpodobnosti $\rho(p,x)$ určete pravděpodobnost $p(x)\mathrm{d}x$, že poloha částice se nachází v intervalu $(x, x+\mathrm{d}x)$.

Výsledky:

(1a), (2b) $p(x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\pi\sqrt{x_{max}^2 - x^2}}\mathrm{d}x$; $x_{max} = \sqrt{\dfrac{2E}{m\omega^2}}$

(2a) $\rho(p,x) = \dfrac{\omega}{2\pi}\delta\left(\dfrac{p^2}{2m} + \dfrac{1}{2}m\omega^2x^2 - E\right)$

9. ⋆Klasický harmonický oscilátor s hmotností m a frekvencí ω je popsán Hamiltoniánem

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2.$$

Předpokládejte, že celková energie systému je rovna E. Určete pravděpodobnost $P(p)\mathrm{d}p$, že hybnost částice se nachází v intervalu $(p, p+\mathrm{d}p)$.
Výsledky:

$P(p)\mathrm{d}p = \dfrac{1}{\pi\sqrt{p_{max}^2 - p^2}}\mathrm{d}p$; $p_{max} = \sqrt{2mE}$

10. ⋆Částice má Maxwellovo rozdělení rychlostí. Pravděpodobnost, že rychlost částice ve směru x je z intervalu $(v_x, v_x+\mathrm{d}v_x)$, rychlost ve směru y je z intervalu $(v_y, v_y+\mathrm{d}v_y)$ a rychlost ve směru z je z intervalu $(v_z, v_z+\mathrm{d}v_z)$ je rovna $P(\vec{v})\mathrm{d}^3v$, kde

$$P(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{m\vec{v}^2}{2kT}\right).$$

Označme $v = |\vec{v}|$.

1. Určete pravděpodobnost $P_{v_x}(v_x)\mathrm{d}v_x$, že rychlost částice ve směru x je z intervalu $(v_x, v_x+\mathrm{d}v_x)$.
2. Určete pravděpodobnost $P_v(v)\mathrm{d}v$, že rychlost částice v je z intervalu $(v, v+\mathrm{d}v)$. Jaká je střední hodnota $\langle v\rangle$, jaká je střední hodnota $\langle v^2\rangle$?

Výsledky:

(1) $P_{v_x}(v_x)\mathrm{d}v_x = \left(\dfrac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\dfrac{mv_x^2}{2kT}\right)\mathrm{d}v_x$

(2) $pV = P_v(v)\mathrm{d}v = 4\pi v^2\left(\dfrac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(\dfrac{mv^2}{2kT}\right)\mathrm{d}v$; $\langle v\rangle = \sqrt{\dfrac{8kT}{\pi m}}$; $\langle v^2\rangle = \dfrac{3kT}{m}$

11. ⋆Předpokládejte, že nádoba je vyplněna částicemi s Maxwellovým rozdělením rychlostí. Hustota částic je rovna n. Pravděpodobnost, že rychlost částice ve směru x je z intervalu $(v_x, v_x+\mathrm{d}v_x)$, rychlost ve směru y je z intervalu $(v_y, v_y+\mathrm{d}v_y)$ a rychlost ve směru z je z intervalu $(v_z, v_z+\mathrm{d}v_z)$ je rovna $P(\vec{v})\mathrm{d}^3v$, kde

$$P(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{m\vec{v}^2}{2kT}\right).$$

Předpokládejte, že ve stěně nádoby je malý otvor plochy A kterým mohou částice unikat z nádoby, přičemž rychlost úniku částic je natolik pomalá, že neovlivňuje rovnováhu uvnitř nádoby. Určete počet částic který unikne tímto otvorem za jednotku času.

Výsledky: $\frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}T} = n\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}$

12. $\star$Uvažujte klasickou částici s hmotností m uzavřenou ve válci nekonečné výšky poloměru R. Válec je umístěn v homogenním gravitačním poli se zrychlením g tak, že gravitační pole působí podél osy válce.

1. Předpokládejte, že systém je v kontaktu s rezervoárem o teplotě T.
   (a) Zapište hustotu pravděpodobnosti $\rho(p, x)$ odpovídající nalezení částice v daném elementu fázového prostoru.
   (b) Určete pravděpodobnost $p(z)\mathrm{d}z$, že se částice nachází ve výšce $(z, z+\mathrm{d}z)$ nad podstavou válce.
2. Předpokládejte, že celková energie systému je rovna E.
   (a) Zapište hustotu pravděpodobnosti $\rho(p, x)$ odpovídající nalezení částice v daném elementu fázového prostoru.
   (b) Určete pravděpodobnost $p(z)\mathrm{d}z$, že se částice nachází ve výšce $(z, z+\mathrm{d}z)$ nad podstavou válce.

Výsledky:

(1a) $\rho(\vec{p}, \vec{x}) = \frac{mg}{kT(2\pi mkT)^{\frac{3}{2}}\pi R^2}\exp\left(-\frac{\vec{p}^2}{2mkT} - \frac{mgz}{kT}\right)$

(1b) $p(z)\mathrm{d}z = \frac{mg}{kT}\exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right)\mathrm{d}z$

(2a) $\rho(\vec{p}, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi^2 R^2}\frac{3mg}{(2mE)^{\frac{3}{2}}}\delta\left(\frac{\vec{p}^2}{2m} + mgz - E\right)$

(2b) $p(z)\mathrm{d}z = \frac{3}{2}\left(\frac{mg}{E}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{E}{mg} - z\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}z$

13. $\star\star$Uvažujte systém složený z N nezávislých částic se spinem $\frac{1}{2}$ a magnetickým momentem μ vložených do magnetického pole s indukcí B. Budeme-li se zabývat pouze interakcí magnetického pole se spiny, pak každá částice se spinem $\frac{1}{2}$ přispěje k celkové energii buď příspěvkem $E_+ = -\mu B$, pokud je magnetický moment orientován ve směru magnetického pole, nebo $E_- = -\mu B$, pokud je magnetický moment orientován proti směru magnetického pole.

1. Předpokládejte, že systém je v kontaktu s tepelným rezervoárem teploty T.
   (a) Zapište stavovou sumu.
   (b) Diferenciál volné energie lze zapsat jako $\mathrm{d}F = -S\mathrm{d}T - m\mathrm{d}B$, kde m je celkový magnetický moment. Ze stavové sumy vypočtěte entropii a celkový magnetický moment.
   (c) Výraz pro entropii přepište jako funkci T a parametru $x = \frac{N_+ - N_-}{N}$, kde N_+ a N_- je počet částic s magnetickým momentem orientovaným ve směru a proti směru magnetického pole. Jakým způsobem závisí celkový magnetický moment a celková energie na x?
2. Předpokládejte, že systém je izolovaný. Stav odpovídající dané celkové energii odpovídá tomu, že určitý počet částic N_+ (N_-) má magnetický moment orientován ve směru (proti směru) magnetického pole.

(a) Vypočtěte počet možných stavů Γ systému. Jak vypadá tento výraz pro velký počet částic, kdy můžeme provést aproximaci $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n$?

(b) Určete závislost počtu stavů Γ na celkové energii E, jak vypadá tato závislost, když ji přepíšeme pomocí parametru x?

(c) Entropii izolovaného systému můžeme zapsat jako $S = k \ln \Gamma$. Pro velký počet částic porovnejte tento výsledek s výsledkem pro entropii získaný ze stavové sumy.

Výsledky:

(1a) $Z = \left(e^{\frac{\mu B}{kT}} + e^{-\frac{\mu B}{kT}}\right)^N$

(1b) $S = kN\left(\ln\left(2\cosh\frac{\mu B}{kT}\right) - \frac{\mu B}{kT}\tanh\frac{\mu B}{kT}\right)$; $m = \frac{\mu N}{\tanh}\frac{\mu B}{kT}$

(1c), (2c) $S = kN\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\ln\left(1-x^2\right) - \frac{x}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right)$; $x = \frac{m}{\mu N} = -\frac{E}{\mu N B}$

(2a) $\Gamma = \frac{N!}{N_+! N_-!}$

(2b) $\Gamma = \left[\left(\frac{1+x}{2}\right)^{-\frac{1+x}{2}}\left(\frac{1-x}{2}\right)^{-\frac{1-x}{2}}\right]^N$

14. $\star$Uvažujte klasický neinteragující nerelativistický plyn (ve třech rozměrech) uzavřený v nádobě objemu V.

1. Vypočtěte (kanonickou) stavovou sumu v případě, kdy plyn je složen z N částic.
2. Ze stavové sumy určete volnou energii a stavovou rovnici.
3. Vypočtěte (grand-kanonickou) stavovou sumu.
4. Vypočtěte potenciál Ω a z něj chemický potenciál jako funkci $\mu(T, V, N)$ a tlak jako funkci $p(T, V, N)$.
5. Pomocí Legenderovy transformace vypočtěte z potenciálu Ω volnou energii F a porovnejte ji s výsledkem získaným z (kanonické) stavové sumy.

Výsledky:

(1) $Z = \frac{1}{N!}\left(V\left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right)^N$

(2), (5) $F = -NkT\ln T - \frac{3}{2}NkT\ln T + kT\ln N! - \frac{3}{2}NkT\ln\frac{mk}{2\pi\hbar^2}$

(3) $\mathcal{Z} = \exp\left(V\left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{\mu}{kT}}\right)$

(4) $\Omega = -kTV\left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{\mu}{kT}}$

15. ⋆⋆Uvažujte plyn složený z N částic uzavřený v nádobě objemu V. Předpokládejte, že mezi částicemi existují slabé párové interakce a systém je popsaný Hamiltoniánem

$$H(\vec{p_1},\dots,\vec{p}_n,\vec{x_1},\dots,\vec{x}_n)=\sum_i \frac{\vec{p_i}^2}{2m}+\sum_{i<j}U(|\vec{x}_i-\vec{x}_j|).$$

Předpokládejte, že potenciál má tvar

$$U(r)=-\frac{a}{4\pi d^3}\exp\left(-\frac{r}{d}\right),$$

počet částic je velký $N \gg 1$. Při výpočtu užijte aprximaci, že interakce mezi částicemi je dostatečně slabá.

1. Zapište stavovou sumu.
2. Určete stavovou rovnici (tj. vztah mezi p, V a N).

Výsledky:

(1) $Z=\frac{1}{N!}\left(V\left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right)^N\left(1+\frac{aN^2}{kTV}\right)$

(2) $\left(p+a\left(\frac{N}{V}\right)^2\right)V=NkT$

(tato stavová rovnice je na půli cesty k van der Waalsově stavové rovnici. Kdybychom chtěli dojít k van der Waalsově stavové rovnici, museli bychom započíst kromě interakce mezi částicemi také to, že každá částice zaujímá nějaký objem.)

16. ⋆Uvažujte klasický harmonický oscilátor v jedné dimenzi popsaný Hamiltoniánem $H=\mathcal{T}+\mathcal{V}$, kde $\mathcal{T}=\frac{p^2}{2m}$ je kinetická energie a $\mathcal{V}=\frac{1}{2}m\omega^2x^2$ je potenciální energie. Předpokládejte, že systém je v rovnováze s tepelným rezervoárem teploty T a ukažte, že hodnota kinetické energie $\langle\mathcal{T}\rangle$ a střední hodnota potenciální energie $\langle\mathcal{V}\rangle$ jsou obě rovny $\frac{1}{2}kT$.

17. ⋆⋆Uvažujte klasický systém popsaný Hamiltoniánem

$$H(p_1,\dots,p_N,x_1\dots,x_N)=\sum_{k=1}^{N}\frac{p_k^2}{2m_k}+U(x_1\dots,x_N),$$

přičemž potenciál $U(x_1\dots,x_N)$ je takový, že jakmile se libovolná ze souřadnic blíží nekonečnu nebo minus nekonečnu tak potenciál roste do nekonečna (dostatečnou rychlostí), tj. $U(x_1\dots,x_N)\xrightarrow{x_k\to\pm\infty}\infty$. Předpokládejte, že systém je v rovnováze s tepelným rezervoárem teploty T a ukažte, že platí

$$\left\langle\frac{p_i^2}{2m_i}\right\rangle=\frac{kT}{2},\qquad\qquad \left\langle x_i\frac{\partial H}{\partial x_j}\right\rangle=\delta_{ij}\frac{kT}{2}.$$

18. ⋆Předpokládejte, že máte N mincí, kde N je násobek čtyř, určete pravděpodobnost $P_{1/2}$, že polovina mincí je otočena pannou nahoru (nejpravděpodobnější stav), a pravděpodobnost $P_{1/4}$, že čtvrtina mincí je otočena pannou nahoru. Pravděpodobnost, že daná mince je otočena pannou navrch je stejná jako pravděpodobnost, že je otočena orlem navrch. Zapište výraz podíl $\frac{P_{1/4}}{P_{1/2}}$ v případě, kdy počet mincí je velký (užijte Stirlingovu aproximaci). Jaký je tento podíl pro $N=10,100,1000$ mincí?

Výsledky: $\frac{P_{1/4}}{P_{1/2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{16}{27}\right)^{\frac{N}{4}}$

19. ⋆⋆⋆V nádobě objemu V je umístěno M částic - průměrná koncentrace částic je rovna $N=\frac{M}{V}$. Daná částice se může nacházet ve všech místech nádoby se stejnou pravděpodobností. Pokud budeme pozorovat nějakou malou část nádoby mající objem v, jaká je pravděpodobnost $P(m)$, že se v ní nachází právě m částic?

- Ukažte, že tato pravděpodobnost je rovna

$$P(m) = \binom{M}{m}\left(\frac{v}{V}\right)^m \left(1-\frac{v}{V}\right)^{M-m} \tag{1}$$

- Předpokládejte, že celkový počet částic je velký $M \gg 1$, objem který pozorujeme je malý $v \ll V$ a pozorovaný objem obsahuje velmi malý počet částic. Ukažte, že v tomto přiblížení lze zapsat pravděpodobnost pomocí Poissonova rozdělení

$$P(m) = \frac{1}{m!}(Nv)^m e^{-Nv}.$$

- Předpokládejte, že celkový počet částic je velký $M \gg 1$, objem který pozorujeme je malý ve srovnání s celkovým objemem $v \ll V$ ale dostatečně velký na to aby obsahoval velký počet částic $m \gg 1$ a aby se počet částic v tomto objemu příliš nelišil od středního počtu částic, tj. $|m - Nv| \ll m$. Ukažte, že v tomto přiblížení lze zapsat pravděpodobnost pomocí Gaussova rozdělení

$$P(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Nv}} \exp\left(-\frac{(m-Nv)^2}{2Nv}\right).$$

20. $\star$Vypočtěte hustotu stavů $g(E)$ ($g(E)\mathrm{d}E$ je počet stavů s energií v intervalu $(E, E+\mathrm{d}E)$) pro dvoudimenzionální plyn uzavřený v nádobě tvaru čtverce s hranami délky L. Uvažujte následující případy:

1. Plyn je nerelativistický ($E = \frac{\vec{p}^2}{2m}$) a nádoba má nekonečně tuhé stěny.
2. Plyn je nerelativistický ($E = \frac{\vec{p}^2}{2m}$) a vlnová funkce splňuje periodické hraniční podmínky.
3. Plyn je ultra-relativistický ($E = c|\vec{p}|$) a nádoba má nekonečně tuhé stěny.
4. Plyn je ultra-relativistický ($E = c|\vec{p}|$) a vlnová funkce splňuje periodické hraniční podmínky.

Porovnejte hustotu stavů v případě kdy nádoba měla nekonečné tuhé stěny a v případě periodických hraničních podmínek.
Výsledky:

$$(1), (2)\ g(E) = \frac{mL^2}{2\pi\hbar^2}$$

$$(3), (4)\ g(E) = \frac{L^2}{2\pi\hbar^2 c^2}E$$

21. $\star\star$Uvažujte dvoudimenzionální nerelativistický ideální bosonický plyn při dostatečně vysokých teplotách, kdy $e^{\frac{\mu}{kT}} \ll 1$. Určete stavovou rovnici, počítejte pomocí poruchové řady v $e^{\frac{\mu}{kT}}$ tak, abyste získali korekci ke stavové rovnici známé pro klasický ideální plyn. Budete potřebovat integrály

$$\int_0^\infty \frac{1}{e^{x-y}-1}\mathrm{d}x = -\ln(1-e^y), \qquad \int_0^\infty \frac{x}{e^{x-y}-1}\mathrm{d}x = \mathrm{Li}_2(e^y),$$

kde dilogaritmus má Taylorův rozvoj

$$\mathrm{Li}_2(x) = \sum_1^\infty \frac{x^n}{n^2}.$$

Výsledky: $e^{\frac{\mu}{kT}} = 1 - e^{-\frac{2\pi\hbar^2 N}{mkTV}} = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\left(\frac{2\pi\hbar^2 N}{mkTV}\right)^n$; $p = \frac{NkT}{V}\left(1 - \frac{1}{4}\frac{2\pi\hbar^2 N}{mkTV}\right)$

22. Uvažujte dvoudimenzionální nerelativistický ideální fermionový plyn při velmi nízké teplotě.

1. $\star$Vypočtěte Fermiho energii - energii částic na povrchu Fermiho kruhu. Vypočtěte energii všech částic za předpokladu, že vyplňují Fermiho kruh. Vypočtěte tlak fermionového plynu při nulové teplotě.

2. $\star\star$Určete Gibbsovu volnou energii, chemický potenciál a najděte první korekci k výrazu pro tlak odvozeném v předchozím bodě. Budete potřebovat integrály

$$\int_0^\infty \frac{1}{e^{x-y}+1}\mathrm{d}x = \ln(1+e^y), \qquad \int_0^\infty \frac{x}{e^{x-y}-1}\mathrm{d}x \sim \frac{1}{2}y^2 + \frac{\pi^2}{6}$$

Výsledky:

(1) $E_F = \frac{2\pi\hbar^2}{m}\frac{N}{V}$; $E = \frac{N}{2}\frac{2\pi\hbar^2}{m}\frac{N}{V}$; $p = \frac{1}{2}\frac{2\pi\hbar^2}{m}\left(\frac{N}{V}\right)^2 = \frac{E_F}{2}\frac{N}{V}$

(2) $\mu = E_F + kT\ln\left(1 - e^{-\frac{E_F}{kT}}\right) \sim E_F - kTe^{-\frac{E_F}{kT}}$; $p = \frac{E_F}{2}\frac{N}{V}\left(1 + \frac{\pi^2}{3}\left(\frac{kT}{E_F}\right)^2\right)$